Адаптивная оптимальная робастная стабилизация авторегрессионного объекта со смещенным внешним возмущением

В.Ф. Соколов

Физико-математический институт
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

sokolov@ipm.komisc.ru

Аннотация

В статье рассматривается задача адаптивного оптимального робастного управления дискретным объектом с неизвестными параметрами авторегрессионной номинальной модели, неизвестными верхней границей и смещением внешнего возмущения и неизвестными коэффициентами усиления возмущений по выходу и управлению. Показателем качества управления служит наихудшая установившаяся верхняя граница выхода. Решение задачи основано на оптимальном полиэдральном оценивании неизвестных неидентифицируемых параметров, где идентификационным критерием является показатель качества управления. Предложена замена неизвестных параметров, модифицирующая модель объекта в модель без возмущения по управлению. Эта замена преобразует невыпуклый показатель качества в дробно-линейный и делает возможным онлайн вычисление текущих оптимальных оценок.

Ключевые слова:

адаптивное управление, оптимальное управление, робастное управление, неопределенность, ограниченное возмущение, множественное оценивание

Adaptive optimal robust stabilization of autoregressive plant under biased external disturbance

V.F. Sokolov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

sokolov@ipm.komisc.ru

Abstract

This paper addresses the problem of adaptive optimal robust control of a discrete-time plant with unknown parameters of autoregressive nominal model, unknown upper bound and bias of external disturbance, and unknown gains of coprime factor perturbations. The control criterion is the worst-case steady-state upper bound of the output. Solution of the problem is based on an optimal polyhedral estimation of unknown non-identifiable parameters with the control criterion treated as the identification criterion. A replacement of unknown parameters is proposed that modifies the plant model to a model without perturbation in control. This transforms the nonconvex control criterion to a linear fractional one and thus makes possible online computation of optimal estimates.

Keywords:

adaptive control, optimal control, robust control, uncertainty, bounded disturbance, set-membership estimation

Введение

Предметом математической теории адаптивного управления, зародившейся в начале 1960-х гг., на первом этапе были задачи управления линейными стационарными объектами управления с неизвестными параметрами передаточной функции и внешними возмущениями. Для систем со случайными возмущениями фундаментальные результаты по синтезу адаптивного оптимального управления на основе онлайн оценивания неизвестных параметров были получены уже к концу 1970-х гг. на основе градиентных алгоритмов [1, 2] и к началу 1990-х гг. — на основе метода наименьших квадратов [3,4]. Градиентные алгоритмы оценивания широко использовались и в задачах адаптивной стабилизации систем с ограниченными детерминированными внешними возмущениями. В начале 1980-х гг. в знаменитых статьях [5, 6] было показано, что известные к тому времени алгоритмы адаптивного управления не гарантируют устойчивости адаптивных систем при наличии даже малых детерминированных внешних возмущений или немоделируемой динамики. Это стимулировало разработку в последующие два десятилетия теории робастного адаптивного управления, в которой рассматривались задачи стабилизации адаптивных систем. Результаты теории в основном базировались на применении функций Ляпунова [7, 8] и относились к системам с достаточно малой немоделируемой динамикой. Параллельно в эти же годы активно разрабатывалась теория робастного управления в H_∞ постановке [9]. Однако результаты данной теории трудно использовать в задачах адаптивного управления, и исследования возможностей применения H_∞-подхода хотя бы для идентификации систем продолжаются до настоящего времени.

В настоящей статье для относительно простого дискретного объекта с авторегрессионной номинальной моделью, ограниченным и смещенным внешним возмущением и операторными возмущениями (неопределенностями) по выходу и управлению рассматривается существенно более сложная по сравнению с адаптивной стабилизацией задача адаптивного оптимального робастного управления. Предполагаются неизвестными параметры номинальной модели, верхняя граница и смещение внешнего возмущения, а также коэффициенты усиления неопределенностей. Цель управления заключается в минимизации верхнего предела модуля выхода объекта в классе указанных возмущений. Решение задачи базируется на результатах теории робастного управления в ℓ_1-постановке, основы которой были заложены в [10–12]. Их развитие для задач адаптивного управления изложено в [13]. Решение оптимальной задачи в условиях неидентифицируемости управляемого объекта оказывается теоретически возможным при использовании показателя качества управления как идентификационного критерия и множественного онлайн оценивания неизвестных параметров [14]. Однако в общем случае показатель качества является невыпуклой функцией оцениваемых неизвестных параметров, и соответствующее оптимальное оценивание затруднительно в онлайн режиме. Для рассматриваемого в статье объекта управления предлагается замена неизвестных параметров, позволяющая свести модель объекта к модели с неопределенностью только по выходу, для которой показатель качества становится дробно-линейной функцией неизвестных параметров, и оптимальное оценивание сводится к задаче линейного программирования. Оптимальность предлагаемого адаптивного управления доказана при дополнительном техническом предположении о динамике замкнутой системы. В отличие от всех традиционных алгоритмов адаптивного управления предлагаемое в статье решение оптимальной задачи обеспечивает верификацию настроенной оптимальной модели благодаря применению метода рекуррентных целевых неравенств [15] и использованию полиэдральных оценок неизвестных параметров.

Мы будем придерживаться следующих обозначений:
$|\varphi|$ — евклидова норма вектора $\varphi \in \mathbb{R}^n$;
ℓ_e — пространство вещественных последовательностей $x = (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots)$,
$x_s^t = (x_s, x_{s+1}, \ldots, x_t)$ для $x \in \ell_e$;
$|x_s^t| = \max_{s \leqslant k \leqslant t} |x_k|$;
ℓ_∞ — нормированное пространство ограниченных вещественных последовательностей $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ с нормой $\|x\| = \sup_t |x_t|$;
$\|x\|_{ss} = \limsup_{t \to +\infty} |x_t|$;
ℓ_1 — нормированное пространство абсолютно суммируемых последовательностей с нормой $\|x\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$;
$\|G\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |g_k| = \|g\|_1$ — индуцированная норма устойчивой линейной стационарной системы $G : \ell_\infty \to \ell_\infty$ с передаточной функцией $G(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$.

1. Постановка задачи

Пусть объект управления с дискретным временем описывается моделью вида

$$a(q^{-1}) y_t = b_1 u_{t-1} + v_t\,, \quad t = 1, 2, 3, \ldots\,, \qquad (1)$$

где $y_t \in \mathbb{R}$ — выход объекта в момент времени t, $u_t \in \mathbb{R}$ — управление, $v_t \in \mathbb{R}$ — суммарное возмущение в объекте,

$$a(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_n q^{-n}$$

и q^{-1} — оператор сдвига назад ($q^{-1} y_t = y_{t-1}$) на линейном пространстве ℓ_e. Начальные значения $y_{1-n}^0 = (y_{1-n}, \ldots, y_0)$ произвольные, $y_k = 0$ при $k < 1 - n$ и $u_k = 0$ при $k < 0$.

Модель (1) без возмущения (т.е. при $v = 0 \in \ell_e$) называется *номинальной моделью* объекта (1). Она характеризуется вектором параметров

$$\xi := (a_1, \ldots, a_n, b_1)^T\,.$$

Априорная информация об объекте (1) состоит из нескольких априорных предположений.

Предположение 1. Вектор параметров ξ неизвестен и принадлежит известному ограниченному многограннику

$$\xi \in \Xi = \{\, \hat{\xi} \mid P\hat{\xi} \geqslant p \,\} \subset \mathbb{R}^{n+1}\,, \qquad (2)$$

где $P \in \mathbb{R}^{l \times (n+m)}$, $p \in \mathbb{R}^l$ и $b_1 \neq 0$ для любого $\xi \in \Xi$.

Предположение 2. Суммарное возмущение v имеет вид

$$v_t = c^w + \delta^w w_t + \delta^y \Delta^1(y)_t + \delta^u \Delta^2(u)_t\,, \qquad (3)$$

где $w \in \ell_\infty$ — *неизвестное* нормализованное ($\|w\|_\infty \leqslant 1$) внешнее возмущение, $\delta^w \geqslant 0$ — *неизвестная* норма (верхняя граница) внешнего несмещенного возмущения и c^w — *неизвестное* смещение суммарного ограниченного внешнего возмущения, ограниченное по модулю известной постоянной C^w:

$$|c^w| \leqslant C^w\,.$$

Операторы Δ^1 и Δ^2 в (3) на пространстве последовательностей ℓ_e удовлетворяют при всех t ограничениям

$$|\Delta^1(y)_t| \leqslant p_t^y := |y_{t-\mu}^{t-1}|,$$

$$|\Delta^2(u)_t| \leqslant p_t^u := |u_{t-\mu}^{t-1}|, \qquad (4)$$

с *неизвестными коэффициентами* $\delta^y \geqslant 0$ и $\delta^u \geqslant 0$.

Операторы Δ^1 и Δ^2 называются операторными возмущениями (или неопределенностями) по выходу и управлению соответственно и описывают линейные нестационарные или нелинейные строго причинные операторы, имеющие известную ограниченную память μ и нормированные на подпространстве ℓ_∞ (т.е. их коэффициенты усиления равны 1). Коэффициенты $\delta^y \geqslant 0$ и $\delta^u \geqslant 0$ характеризуют коэффициенты усиления неопределенностей (операторных возмущений) по выходу и управлению в суммарном возмущении v. Управление системами с неопределенностью называют *робастным*. Память неопределенностей μ

выбирается конструктором исходя из априорной информации об управляемой системе и может быть выбрана сколь угодно большой, но не бесконечной, без ущерба для качества синтезируемого ниже адаптивного управления (см. замечание в конце раздела 2). Необходимые для стабилизируемости объекта ограничения на коэффициенты усиления неопределенностей будут сформулированы в разделе 3.

Введем обозначение θ для вектора всех неизвестных параметров объекта (1)

$$\theta = (\xi^T, c^w, \delta^w, \delta^y, \delta^u)^T .$$

Задача. Рассматриваемая в статье задача заключается в построении обратной связи вида $u_t = U_t(y_0^t, u_0^{t-1}, \Xi, C^w)$, гарантирующей как можно меньшую верхнюю границу для асимптотического показателя качества

$$J_\mu(\theta) = \sup_v \limsup_{t\to+\infty} |y_t| , \tag{5}$$

где sup берется на множестве возмущений v, удовлетворяющих предположению 2. На обратную связь налагается трудно формализуемое в точных терминах требование ее вычислительной реализуемости в онлайн режиме.

Уточненная формулировка задачи и необходимое дополнительное априорное предположение о робастной стабилизируемости объекта (1) приведены в конце раздела 2.

2. Оценка показателя качества оптимальной системы при известных параметрах

Для объекта с известным вектором коэффициентов ξ и при известном смещении c^w регулятор

$$u_t = \frac{1}{b_1}[(a(q^{-1}) - 1)y_{t+1} - c^w] \tag{6}$$

гарантирует при всех t равенство

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= v_{t+1} - c^w = \\ &= \delta^w w_{t+1} + \delta^y \Delta^1(y)_{t+1} + \delta^u \Delta^2(u)_{t+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку будущие значения неопределенностей и возмущения w_t непредсказуемы, регулятор (6) является <u>оптимальным</u> для показателя качества (5). Введем обозначения для передаточной функции регулятора (6) :

$$G^\xi(\lambda) = \frac{a(\lambda) - 1}{b_1 \lambda} = \frac{1}{b_1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\,\lambda^k .$$

Тогда

$$\|G^\xi\| = \frac{1}{|b_1|}\sum_{k=1}^{n} |a_k| . \tag{8}$$

Замкнутая система, включающая объект (1) и некоторый регулятор, называется *робастно устойчивой* в классе неопределенностей (4), если значение показателя качества (5) для этой системы конечно.

Робастное качество оптимальной системы (1), (6) описывается в следующей теореме.

Теорема 1. 1. Система (1), (6) робастно устойчива при $\mu = +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\delta^y + \delta^u \|G^\xi\| < 1 . \tag{9}$$

2. Если выполнено условие робастной устойчивости (9), то

$$J_\mu(\theta) \nearrow J(\theta) = \frac{\delta^w + \delta^u |c^w/b_1|}{1 - \delta^y - \delta^u\|G^\xi\|} \quad (\mu \to +\infty) , \tag{10}$$

где знак $\nearrow$ означает монотонную сходимость снизу при $\mu \to +\infty$.

Доказательство. Условие робастной устойчивости (9) следует из теоремы 7 [16], примененной к системе (1), (6). Значение $J(\theta)$, определенное в (10), является значением показателя качества (5) при $\mu = +\infty$, т.е. $J(\theta) = J_{+\infty}(\theta)$ и получается из общей теоремы 5 в [16] путем соответствующих алгебраических вычислений. Монотонная сходимость в (10) прямо следует из теоремы 6 в [16]. □

Последнее априорное предположение диктуется условием робастной стабилизируемости (9) объекта с известными параметрами.

Предположение 3. Неизвестный вектор параметров θ удовлетворяет неравенству

$$\delta^y + \delta^u \|G^\xi\| \leqslant \bar\delta < 1 \tag{11}$$

с известным числом $\bar\delta$.

Предположение об известной верхней границе $\bar\delta$ в (11) не является ограничительным. Число $\bar\delta$ выбирается конструктором адаптивного регулятора и может быть выбрано сколь угодно близким к единице. При этом исключаются из рассмотрения неприемлемые для практических приложений модели, слишком близкие к границе области робастно стабилизируемых объектов. Замена открытого множества параметров θ, удовлетворяющих (9) сколь угодно близким к нему закрытым множеством (11), дает возможность сформулировать строгие результаты о качестве адаптивного субоптимального управления.

Замечание. Базовые результаты ℓ_1-теории робастного управления относились к системам со структурированной неопределенностью с бесконечной памятью ($\mu = +\infty$) и только с нулевыми начальными данными [10]. В то же время модель возмущений с бесконечной памятью слишком консервативна и не соответствует реальным задачам управления. Предположение об ограниченной памяти возмущений позволяет исключить зависимость показателя качества от слишком далекой предыстории со сколь угодно малыми потерями для показателя качества $J(\theta)$ и, кроме того, предоставляет возможность онлайн верификации модели объекта, включая квантификацию (оценку параметров) неопределенностей и внешнего возмущения.

Уточненная постановка задачи. Требуется при априорных предположениях 1-3 построить обратную связь, гарантирующую при любых начальных данных и любом возмущении v выполнение с заданной точностью неравенства

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t| \leqslant J(\theta) . \tag{12}$$

3. Преобразование к модели с неопределенностью по выходу

Решение поставленной оптимальной задачи базируется на использовании множественных (полиэдральных) оценок неизвестных параметров и оптимальном оценивании, в котором идентификационным критерием является показатель качества $J(\theta)$. В данном разделе описывается замена неизвестных параметров, позволяющая преобразовать модель управляемого объекта к модели с неопределенностью только по выходу. После преобразования нелинейный и невыпуклый показатель качества $J(\theta)$ становится дробно-линейным, а ограничение (11) - линейным. Благодаря этому вычисление текущих оптимальных оценок сводится к задаче линейного программирования.

Следующее простое утверждение позволяет использовать метод рекуррентных целевых неравенств для оценки неизвестного вектора параметров θ.

Лемма 1. Если для некоторой оценки

$$\hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T,$$

$$\hat{\xi} \in \Xi, \quad \hat{\delta}^w \geqslant 0, \quad \hat{\delta}^y \geqslant 0, \quad \hat{\delta}^u \geqslant 0\,,$$

неизвестного вектора θ при всех t справедливы неравенства

$$|\hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1} - \hat{c}^w| \leqslant \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p^y_t + \hat{\delta}^u p^u_t, \quad (13)$$

то объект управления (1) с вектором параметров $\hat{\theta}$ удовлетворяет уравнению (1) и априорным предположениям 1 и 2 при всех t.

Доказательство. Априорное предположение 1 выполнено в силу включения $\hat{\xi} \in \Xi$. Определим возмущение $\hat{v}_t = \hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1}$ для всех t. Тогда объект управления с вектором параметров $\hat{\theta}$ и суммарным возмущением $\hat{v}$ удовлетворяет уравнению (1), и в силу (13) возмущение $\hat{v}$ удовлетворяет неравенствам

$$|\hat{v}_t - \hat{c}^w| \leqslant \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p^y_t + \hat{\delta}^u p^u_t\,. \quad (14)$$

Значения $\hat{v}_t$ можно представить в виде (3), выбрав подходящие значения $w_t, \Delta^1(y)_t, \Delta^2(u)_t$, удовлетворяющие неравенствам (4). Это гарантирует справедливость априорного предположения 2. □

В силу леммы 1 при любом управлении объектом (1) полная информация о векторе неизвестных параметров θ к моменту времени t имеет вид

$$\theta \in \Theta_t = \{\hat{\theta} \in \Theta_0 \mid \quad |\hat{a}(q^{-1})y_k - \hat{b}_1 u_{k-1} - \hat{c}^w| \leqslant \hat{\delta}^w + \hat{\delta}^y p^y_k + \hat{\delta}^u p^u_k \; \forall k \leqslant t\,\},$$

где

$$\Theta_0 = \{\, \hat{\theta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^w, \hat{\delta}^y, \hat{\delta}^u)^T \mid \hat{\xi} \in \Xi\,,\ \hat{\delta}^w \geqslant 0\,, \hat{\delta}^y \geqslant 0\,,\ \hat{\delta}^u \geqslant 0\,,\ \hat{\delta}^y + \hat{\delta}^u \|G^{\hat{\xi}}\| \leqslant \bar{\delta}\,\}$$

— априорное множество допустимых параметров.

Из леммы 1 следует *неидентифицируемость* параметров ξ и c^w оптимального регулятора (6) при любом управлении объектом (1). Действительно, множества Θ_t состоят из векторов $\hat{\theta} \in \Theta_0$, которые удовлетворяют уравнению (1) и априорным предположениям 1-3 вплоть до момента времени t, и любой вектор $\hat{\theta}$ с достаточно большой компонентой $\hat{\delta}^w$ лежит в Θ_t, каким бы ни было управление объектом до момента t.

Метод рекуррентных целевых неравенств заключается в построении сходящейся последовательности оценок θ_t, достаточно точно удовлетворяющих *целевым неравенствам* (13) при всех достаточно больших t. Однако этого недостаточно для решения поставленной оптимальной задачи, и для предельной оценки θ_∞ необходимо дополнительно обеспечить выполнение с заданной точностью неравенства

$$J(\theta_\infty) \leqslant J(\theta)$$

с неизвестным и не идентифицируемым вектором θ. Это обстоятельство диктует необходимость использования показателя качества J в качестве идентификационного критерия, т.е. вычисления текущих оптимальных оценок по формуле

$$\theta_t = \underset{\hat{\theta} \in \Theta_t}{\operatorname{argmin}}\; J(\hat{\theta}) = \underset{\hat{\theta} \in \Theta_t}{\operatorname{argmin}}\; \frac{\hat{\delta}^w + \hat{\delta}^u |\hat{c}^w / \hat{b}_1|}{1 - \hat{\delta}^y - \hat{\delta}^u \|G^{\hat{\xi}}\|}\,. \quad (15)$$

Однако вычисление по формуле (15) не релизуемо в режиме онлайн, поскольку, во-первых, число целевых неравенств в описании множеств Θ_t может неограниченно возрастать и, во-вторых, показатель качества J и условие робастной стабилизируемости (11) невыпуклы. Первую трудность можно преодолеть использованием верхних полиэдральных оценок множеств Θ_t. Для преодоления второй трудности далее описывается замена неизвестных параметров, позволяющая перейти к модели с неопределенностью только в канале выхода.

Пусть объект (1) управляется так, что для всех t выполнены неравенства

$$|u_t| \leqslant C_1 + C_2 |y^t_{t-n+1}| \quad (16)$$

с некоторыми постоянными C_1, C_2. Из (1), (16) и предположения 2 следует

$$\begin{aligned} |a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| &\leqslant \\ \leqslant \delta^w + \delta^y |y^{t-1}_{t-\mu}| + \delta^u |u^{t-1}_{t-\mu}| &\leqslant \\ \leqslant \delta^w + \delta^u C_1 + (\delta^y + \delta^u C_2)|y^{t-1}_{t-\mu-n}| & \end{aligned} \quad (17)$$

и, следовательно, для любого $\bar{\mu} \geqslant \mu + n$

$$\begin{aligned} |a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| &\leqslant \\ \leqslant \delta^w + \delta^u C_1 + (\delta^y + \delta^u C_2)|y^{t-1}_{t-\bar{\mu}}|. & \end{aligned} \quad (18)$$

Введем новые параметры $\tilde{\zeta}, \tilde{\delta}^e$ и $\tilde{\delta}$:

$$\tilde{\zeta} = (\xi, c^w, \tilde{\delta}^e, \tilde{\delta}),$$

$$\tilde{\delta}^e = \delta^w + \delta^u C_1\,, \quad \tilde{\delta} = \delta^y + \delta^u C_2\,. \quad (19)$$

Неравенства (18) относительно новых параметров принимают вид

$$|a(q^{-1})y_t - b_1 u_{t-1} - c^w| \leqslant \tilde{\delta}^e + \tilde{\delta}|y^{t-1}_{t-\bar{\mu}}|\,, \quad (20)$$

эквивалентный неравенствам (13) для модифицированного вектора параметров

$$\tilde{\theta}^m = (\xi^T, c^w, \tilde{\delta}^e, \tilde{\delta}, 0)^T .$$

В силу леммы 1 неравенства (20) означают, что при выполнении неравенств (16) выход y можно считать выходом объекта (1) с модифицированным вектором параметров $\tilde{\theta}^m$ (без неопределенности по управлению), и для этого объекта из теоремы 1 имеем

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t| \leqslant J(\tilde{\theta}^m) = \frac{\tilde{\delta}^e}{1-\tilde{\delta}} . \qquad (21)$$

Если объект (1) управляется оптимальным регулятором (6), то

$$|u_t + c^w/b_1| \leqslant \|G^\xi\| |y^t_{t-n+1}| ,$$

и, следовательно,

$$|u_t| \leqslant |c^w/b_1| + \|G^\xi\| |y^t_{t-n+1}\| . \qquad (22)$$

Неравенства (22) гарантируют неравенства (16) и (18) с постоянными $C_1 = |c^w/b_1|$ и $C_2 = \|G^\xi\|$, для которых параметры $\tilde{\delta}^e$ и $\tilde{\delta}$ из (19) принимают вид

$$\delta^e = \delta^w + \delta^u |c^w/b_1| , \quad \delta = \delta^y + \delta^u \|G^\xi\| . \qquad (23)$$

Тогда для вектора

$$\zeta = (\xi^T, c^w, \delta^e, \delta)^T \qquad (24)$$

получаем

$$I(\zeta) := \frac{\delta^e}{1-\delta} = J(\theta) . \qquad (25)$$

4. Адаптивное оптимальное управление

Адаптивное оптимальное управление будет основано на вычислении оценок $\zeta_t = (\xi^T_t, c^w_t, \delta^e_t, \delta_t)^T$ неизвестного вектора параметров ζ модифицированной модели с неопределенностью только по выходу с использованием вместо целевых неравенств (13) модифицированных целевых неравенств

$$|\hat{a}(q^{-1})y_t - \hat{b}_1 u_{t-1} - \hat{c}^w| \leqslant \hat{\delta}^e + \hat{\delta} p^y_t . \qquad (26)$$

Вместе с векторными оценками ζ_t будут вычисляться полиэдральные оценки Z_t, составленные из априорных ограничений и нескольких линейных неравенств, порожденных модифицированными целевыми неравенствами (26). Начальные оценки Z_0 и ζ_0 имеют вид

$$Z_0 = \{ \, \hat{\zeta} = (\hat{\xi}^T, \hat{c}^w, \hat{\delta}^e, \hat{\delta})^T \mid \hat{\xi} \in \Xi, \ |\hat{c}^w| \leqslant C^w \\ \hat{\delta}^e \geqslant 0, \ 0 \leqslant \hat{\delta} \leqslant \bar{\delta} \, \} ,$$

$$\zeta_0 = (\xi^T_0, 0, 0, 0)^T ,$$

где ξ_0 — любой вектор из априорного многогранника Ξ и $\bar{\delta}$ — верхняя оценка параметра δ из предположения 3.

Выберем любое число $\bar{\mu} \geqslant \mu + n$ запоминаемых выходов $y^t_{t-\bar{\mu}+1}$ и параметр $\varepsilon > 0$ мертвой зоны, который будет гарантировать конечное число обновлений оценок. Управление u_t в момент t определяется *адаптивным регулятором*

$$u_t = \frac{1}{b^t_1}(a^t_1 y_t + a^t_2 y_{t-1} + \ldots + a^t_n y_{t-n+1} - c^w_t) . \quad (27)$$

Алгоритм обновления векторных оценок ζ_t и полиэдральных оценок Z_t имеет следующий вид. После измерения выхода y_{t+1} в момент $t+1$ положим

$$\begin{aligned} &\varphi^T_t = (-y_t, -y_{t-1}, \ldots, -y_{t-n+1}, u_t), \\ &\eta_{t+1} = \mathsf{sign}(y_{t+1} - \varphi^T_t \xi_t - c^w_t) , \\ &p_{t+1} = |y^t_{t-\bar{\mu}+1}| , \quad \nu_{t+1} = \eta_{t+1} y_{t+1} , \\ &\psi_{t+1} = (\eta_{t+1}\varphi^T_t, \eta_{t+1}, 1, p_{t+1})^T . \end{aligned}$$

В этих обозначениях уравнение адаптивного регулятора (27) эквивалентно равенству $\varphi^T_t \xi_t + c^w_t = 0$, так что $\eta_{t+1} = \mathsf{sign}(y_{t+1})$, а целевое неравенство (26) в момент $t+1$ для текущей оценки ζ_t эквивалентно неравенству

$$\psi^T_{t+1}\zeta_t \geqslant \nu_{t+1} . \qquad (28)$$

Положим

$$\zeta_{t+1} := \zeta_t , \quad Z_{t+1} := Z_t,$$
$$\text{если} \quad \psi^T_{t+1}\zeta_t \geqslant \nu_{t+1} - \varepsilon|\psi_{t+1}| . \qquad (29)$$

В противном случае, положим

$$Z_{t+1} := Z_t \cap \Omega_{t+1} , \qquad (30)$$

$$\Omega_{t+1} := \{ \, \hat{\zeta} \mid \psi^T_{t+1}\hat{\zeta} \geqslant \nu_{t+1} \, \} ,$$

$$\zeta_{t+1} := \operatorname*{argmin}_{\hat{\zeta}\in Z_{t+1}} I(\hat{\zeta}) , \qquad (31)$$

где показатель качества I определен в (25).

Алгоритм оптимального оценивания (29)–(31) имеет простую геометрическую интерпретацию. В силу (29) оценки Z_t и ζ_t обновляются, когда расстояние от вектора ζ_t до полупространства Ω_{t+1} больше ε (это обеспечивается добавлением слагаемого $-\varepsilon|\psi_{t+1}|$ в условие обновления оценок в (29)). Обновление Z_t в (30) заключается в добавлении линейного неравенства (28), которое является тем из двух линейных неравенств, составляющих целевое неравенство (26), которое нарушается для оценки ζ_t. Вычисление оптимальной оценки ζ_{t+1} согласно (31) представляет собой задачу дробно-линейного программирования, стандартным образом сводящуюся к задаче линейного программирования введением вспомогательной переменной [17].

Теорема 2. Пусть объект (1) с неизвестным вектором параметров $\theta = (\xi^T, c^w, \delta^w, \delta^y, \delta^u)^T$ удовлетворяет предположениям 1, 2 и управляется адаптивным регулятором (27) с алгоритмом оценивания (29)–(31) и с параметром мертвой зоны ε, удовлетворяющим неравенствам

$$0 < \varepsilon < \frac{1-\bar{\delta}}{\sqrt{n+1} + G_u}, \quad G_u = \sup_{\xi\in\Xi} \|G^\xi\| . \qquad (32)$$

Тогда при любых начальных значениях y^0_{1-n} и любом возмущении v, удовлетворяющем предположению 2, справедливы утверждения:

1) если параметры δ^y и δ^u удовлетворяют неравенству

$$\delta^y + \delta^u G_u \leqslant \bar{\delta} < 1\,, \qquad (33)$$

то множественные оценки Z_t и векторные оценки ζ_t сходятся за конечное время и

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t| \leqslant I(\zeta_\infty^\varepsilon) < I(\zeta_\infty) + K_{\zeta_\infty}\varepsilon\,, \qquad (34)$$

$$I(\zeta_\infty) \leqslant \bar{I} = \frac{\delta^w + \delta^u \max_t |c_t^w/b_1^t|}{1-\delta^y-\delta^u\max_t \|G^{\xi_t}\|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta^w + \delta^u \max_t |c_t^w/b_1^t|}{1-\delta^y-\delta^u G_u}\,, \qquad (35)$$

где $\zeta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e, \delta_\infty)$ — предельное значение ζ_t,

$$\zeta_\infty^\varepsilon = (\,\xi_\infty^T,\, c_\infty^w, \delta_\infty^e + \varepsilon(\sqrt{2} + |c_\infty^w/b_1^\infty|)\,,$$
$$\delta_\infty + \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|))^T, \qquad (36)$$

$$K_{\zeta_\infty} = \frac{\sqrt{2} + |c_\infty^w/b_1^\infty| + \delta_\infty^e(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|)}{(1-\delta_\infty - \varepsilon(\sqrt{n+1} + \|G^{\xi_\infty}\|))^2}\,;$$

2) если параметры δ^y и δ^u удовлетворяют предположению 3 и при всех t справедливы неравенства

$$|u_t| \leqslant \bar{u}_t = |c^w/b_1| + \|G^\xi\| |y_{t-\bar{\mu}+1}^t|\,, \qquad (37)$$

то множественные оценки Z_t и векторные оценки ζ_t сходятся за конечное время и

$$\limsup_{t\to+\infty} |y_t| \leqslant I(\zeta_\infty^\varepsilon) < I(\zeta_\infty) + K_{\zeta_\infty}\varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant J(\theta) + K_{\zeta_\infty}\varepsilon\,, \qquad (38)$$

где $\zeta_\infty = (\xi_\infty^T, c_\infty^w, \delta_\infty^e, \delta_\infty)$ — предельное значение ζ_t и ζ_∞^ε, K_{ζ_∞} имеют вид (36).

Теорема 2 приводится без доказательства.

Утверждение 1 теоремы 2 обеспечивает устойчивость адаптивной системы на сильно суженном (так как $G_u \geqslant \|G^\xi\|$) множестве (33) параметров (δ^y, δ^u) по сравнению с множеством (11). Гарантируемые верхние оценки $\bar{I}$ в (35) являются грубыми и сильно завышенными по сравнению с вычисляемыми онлайн и сходящимися к $I(\zeta_\infty^\varepsilon)$ за конечное время верхними оценками $I(\zeta_t^\varepsilon)$, согласованными с данными измерений. Тем не менее уникальным достоинством этих грубых оценок является то, что они соответствуют "настоящим" значениям не идентифицируемых коэффициентов усиления неопределенностей δ^y и δ^u. Заметим, что даже такие области робастной устойчивости и такие оценки качества адаптивных систем недостижимы при использовании стандартных градиентных алгоритмов оценивания, способных гарантировать только грубые оценки, одинаковые для всех допустимых объектов.

Утверждение 2 теоремы 2 базируется на дополнительном условии (37), которое не верифицируемо данными измерений, так как параметры c^w, b_1 и ξ неизвестны. Адаптивный регулятор (27) гарантирует справедливость этих неравенств для текущих оценок c_t^w, b_1^t и ξ_t. Поскольку в цепочке неравенств (17) и (18) каждое из неравенств является существенно огрубленным и текущие оптимальные оценки ζ_t минимизируют показатель качества I, неравенства (37), как показывают многочисленные численные эксперименты, фактически выполняются. Их строгое доказательство остается открытой проблемой.

Важнейшим дополнительным достоинством использования полиэдральных оценок является верифицируемость априорных предположений об управляемом объекте. Индикатором приемлемости априорных предположений и текущих оценок неизвестных параметров управляемого объекта служит неубывающая последовательность наименьших согласованных с априорными предположениями и данными измерений значений $I(\zeta_t)$. Если текущая оценка ζ_t не изменяется на длительном промежутке времени, то она удовлетворяет целевым неравенствам и тем самым гарантирует эту наилучшую верхнюю границу $I(\zeta_t)$ для выхода $|y_t|$ после затухания переходных процессов. Неизменность оценки ζ_t на длительном промежутке времени гарантирует также соответствие априорных предположений данным измерений при текущем гарантируемом и наилучшем асимптотическом качестве управления $I(\zeta_t)$. Традиционные методы синтеза адаптивного управления как в детерминированной, так и в стохастической постановке оставляют проблемы верификации модели и априорных предположений вне рассмотрения.

Заключение

Рассмотрена задача оптимально робастной стабилизации объекта с авторегрессионной номинальной моделью в условиях сильной априорной неопределенности. Предполагаются неизвестными не только коэффициенты передаточной функции номинального объекта, но и верхняя граница и смещение внешнего возмущения и коэффициенты усиления неопределенностей по выходу и управлению, что влечет неидентифицируемость неизвестных параметров. Показателем качества управления служит наихудшая в классе возмущений асимптотическая верхняя граница модуля выхода управляемого объекта. Решение задачи базируется на результатах ℓ_1-теории робастного управления и использования показателя качества задачи управления как идентификационного критерия. Предложена замена неизвестных параметров, позволяющая свести задачу вычисления текущих оптимальных оценок к задаче дробно-линейного программирования. Полиэдральное оценивание неизвестных параметров дополнительно решает задачу онлайн верификации настраиваемой модели и априорных предположений.

Литература

1. Goodwin, G. Discrete-time multivariable adaptive control / G. Goodwin, P. Ramadge, P. Caines // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1980. – Vol. 25. – № 3. – P. 449–456.
2. Goodwin, G. Discrete time stochastic adaptive control / G. Goodwin, P. Ramadge, P. Caines // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1981. – Vol. 19. – № 6. – P. 829–853.

3. Guo, L. The Åström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers / L. Guo, H.-F. Chen // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36. – № 7. – P. 802–812.
4. Guo, L. Further results on least squares based adaptive minimum variance control / L. Guo // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1994. – Vol. 32. – № 1. – P. 187–212.
5. Rohrs, C. Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics / C. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein // The 21st IEEE Conference on Decision and Control. – 1882. – P. 3–11.
6. Rohrs, C.E. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics / C.E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1985. – Vol. 30. – № 9. – P. 881–889.
7. Narendra, K. Stable adaptive systems / K. Narendra, A. Annaswamy. – Dover, 2005. – 512 p.
8. Ioannou, P.A. Robust adaptive control / P.A. Ioannou, J. Sun. – New Jersey: PTR Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996. – 852 p.
9. Zhou, K. Robust and Optimal Control / K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover. – New Jersey: Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996. – 616 p.
10. Khammash, M. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty / M. Khammash, J. Pearson // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36. – № 4. – P. 398–412.
11. Khammash, M. Robust steady-state tracking / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1995. – Vol. 40. – № 11. – P. 1872–1880.
12. Khammash, M. Robust performance: unknown disturbances and known fixed inputs / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42. – № 12. – P. 1730–1734.
13. Соколов, В.Ф. Робастное управление при ограниченных возмущениях / В.Ф. Соколов. – Сыктывкар: Коми научный центр УрО РАН, 2011. – 218 с.
14. Sokolov, V.F. Adaptive ℓ_1 robust control for SISO system / V.F. Sokolov // Systems and Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – № 5. – P. 379–393.
15. Фомин, В.Н. Адаптивное управление динамическими объектами / В.Н. Фомин, А.Л. Фрадков, В.А. Якубович. – Москва: Наука, 1981. – 447 с.
16. Sokolov, V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty / V.F. Sokolov // Syst. Control Lett. – 2001. – V. 42 – № 5. – P. 363–377.
17. Boyd, S. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. – New York: Cambridge University Press, 2004. – 742 p.

References

1. Goodwin, G. Discrete-time multivariable adaptive control / G. Goodwin, P. Ramadge, P. Caines // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1980. – Vol. 25. – № 3. – P. 449–456.
2. Goodwin, G. Discrete time stochastic adaptive control / G. Goodwin, P. Ramadge, P. Caines // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1981. – Vol. 19. – № 6. – P. 829–853.
3. Guo, L. The Åström-Wittenmark self-tuning regulator revisited and ELS-based adaptive trackers / L. Guo, H.-F. Chen // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36. – № 7. – P. 802–812.
4. Guo, L. Further results on least squares based adaptive minimum variance control / L. Guo // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1994. – Vol. 32. – № 1. – P. 187–212.
5. Rohrs, C. Robustness of adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics / C. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein // The 21st IEEE Conference on Decision and Control. – 1882. – P. 3–11.
6. Rohrs, C.E. Robustness of continuous-time adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics / C.E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1985. – Vol. 30. – № 9. – P. 881–889.
7. Narendra, K. Stable adaptive systems / K. Narendra, A. Annaswamy. – Dover, 2005. – 512 p.
8. Ioannou, P.A. Robust adaptive control / P.A. Ioannou, J. Sun. – New Jersey: PTR Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996. – 852 p.
9. Zhou, K. Robust and Optimal Control / K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover. – New Jersey: Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996. – 616 p.
10. Khammash, M. Performance robustness of discrete-time systems with structured uncertainty / M. Khammash, J. Pearson // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1991. – Vol. 36. – № 4. – P. 398–412.
11. Khammash, M. Robust steady-state tracking / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1995. – Vol. 40. – № 11. – P. 1872–1880.
12. Khammash, M. Robust performance: unknown disturbances and known fixed inputs / M. Khammash // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42. – № 12. – P. 1730–1734.
13. Sokolov V.F. Robastnoye upravleniye pri ogranichennykh vozmushcheniyakh [Robust control under bounded dicturbances] / V.F. Sokolov. – Syktyvkar: Komi Sience Center UrD RAS, 2011. – 218 p.
14. Sokolov, V.F. Adaptive ℓ_1 robust control for SISO system / V.F. Sokolov // Systems and Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – № 5. – P. 379–393.
15. Fomin, V.N. Adaptivnoye upravleniye dinamicheskimi ob"yektami [Adaptive control of dynamic plants] / V.N. Fomin, A.L. Fradkov, V.A. Yakubovich. – Moscow: Nauka, 1981. – 447 p.
16. Sokolov, V.F. ℓ_1 robust performance of discrete-time systems with structured uncertainty / V.F. Sokolov // Syst. Control Lett. – 2001. – Vol. 42 – № 5. – P. 363–377.
17. Boyd, S. Convex optimization / S. Boyd, L. Vandenberghe. – New York: Cambridge University Press, 2004. – 742 p.

Для цитирования:
Соколов, В.Ф. Адаптивная оптимальная робастная стабилизация авторегрессионного объекта со смещенным внешним возмущением / В.Ф. Соколов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 20–27. УДК: 517.977 + 62-50. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-20-27

For citation:
Sokolov, V.F. Adaptive optimal robust stabilization of autoregressive plant under biased external disturbance / V.F. Sokolov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 20–27. UDC: 517.977 + 62-50. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-20-27

Дата поступления рукописи: 14.09.2022
Received: 14.09.2022