Точные решения уравнения для векторной частицы с нулевой массой и калибровочная симметрия для поля со спином 2

А.В. Ивашкевич[1], А.В. Бурый[1], Е.М. Овсиюк[2]

[1]Институт физики им. Б.И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси,
г. Минск, Беларусь
[2]Мозырский государственный педагогический
университет имени И.П. Шамякина,
г. Мозырь, Беларусь

ivashkevich.alina@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
e.ovsiyuk@mail.ru

Аннотация

Для безмассовой частицы со спином 2 существует калибровочная симметрия, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Она была установлена В. Паули и М. Фирцем. Калибровочные состояния поля со спином 2 определяются произвольным векторным полем. Данные решения не вносят вклад в наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса поля. Это приводит к необходимости выделять калибровочные решения, оставляя только физически наблюдаемые некалибровочные. Для того, чтобы описать сферически симметричные калибровочные состояния для поля со спином 2, необходимо иметь в явном виде сферически симметричные решения для безмассового поля со спином 1. Построение четырех независимых решений уравнения для частицы со спином 1 является основной целью представленной работы.

Ключевые слова:

спин 1, спин 2, теория Паули–Фирца, безмассовая частица, калибровочные степени свободы, сферическая симметрия, точные решения

Exact solutions of the equation for a vector particle with zero mass and gauge symmetry for a field with spin 2

A.V. Ivashkevich[1], A.V. Bury[1], E.M. Ovsiyuk[2]

[1]B.I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus,
Minsk, Belarus
[2]Mozyr State Pedagogical University
named after I.P. Shamyakin,
Mozyr, Belarus

ivashkevich.alina@yandex.by
anton.buryy.97@mail.ru
e.ovsiyuk@mail.ru

Abstract

It is known that for a massless spin 2 field according to Pauli-Fierz theory there exists a gauge symmetry which extends the gauge symmetry in Maxwell electrodynamics. The gauge states for spin 2 field are determined by an arbitrary 4-vector field. These states do not contribute into observable physical quantities like an energy-momentum tensor. This leads to the task of finding and eliminating the gauge solutions from the complete set of solutions of the spin 2 field. Therefore, taking in mind the case of spherical symmetry, in the present paper we will construct the complete set of spherical solutions for Duffin-Kemmer-Petiau massles equation. The solving of this task is the goal of the present paper.

Keywords:

spin 1, spin 2, Pauli–Fierz theory, massless particle, gauge degrees of freedom, spherical symmetry, exact solutions

Введение

Теория массивного и безмассового полей со спином 2, начиная с работ В. Паули и М. Фирца [1, 2], всегда присутствовала в литературе. Большая часть исследований выполнена в рамках формализма уравнений второго порядка Паули-Фирца. Первое систематическое изучение теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено Ф.И. Федоровым [3]. Оказалось, что частица со спином 2 требует для своего описания 30-компонентной волновой функции. Позднее это описание было заново переоткрыто и дополнительно исследовано в работе Т. Редже [4].

В формализме уравнений первого порядка для описания поля используется набор из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга и тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. В его основе лежит лагранжев формализм, при этом все свойства симметрии тензоров вместе с условиями связи на них содержатся в исходном лагранжиане. Описания массивной и безмассовой частиц существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Она была установлена еще Паули и Фирцем [1, 2] (см. также недавние работы [5–8]).

Основные калибровочные скалярная и тензорная компоненты, входящие в описание безмассового поля со спином 2, определяются произвольным векторным полем $\Lambda_\alpha(x)$ следующими формулами [1, 2]:

$$\bar{\Phi} = \nabla^\alpha \Lambda_\alpha, \quad \bar{\Phi}_{\alpha\beta} = \nabla^\alpha \Lambda_\beta + \nabla^\beta \Lambda_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x) \nabla^\sigma \Lambda_\sigma.$$

Приводим их сразу в общековариантной форме. Калибровочные степени свободы не должны давать вклада в наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса поля. Это приводит к необходимости выделять в безмассовом случае калибровочные решения, оставляя только физически наблюдаемые некалибровочные.

В сферически симметричном случае описание калибровочных степеней свободы для поля со спином 2 требует иметь в явном виде сферически симметричные решения для безмассового поля со спином 1. Построение подобных независимых решений уравнения для безмассовой частицы со спином 1 является задачей данной работы.

1. Безмассовая векторная частица, сферические волны

Напомним подстановку для волновой функции в безмассовом уравнении Даффина-Кеммера для векторной частицы в базисе сферической тетрады [9, 10]:

$$x^\alpha = (t, r, \theta, \phi), \quad dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 d\phi^2,$$

$$e^\alpha_{(0)} = (1,0,0,0), \quad e^\alpha_{(1)} = (0,0,\frac{1}{r^2},0),$$

$$e^\alpha_{(2)} = (1,0,0,\frac{1}{r\sin\theta}), \quad e^\alpha_{(3)} = (0,1,0,0),$$

$$\bar{H} = e^{-imt} h(r) D_0,$$

$$\bar{H}_1 =$$

$$= e^{-imt}\left(h_0(r)D_0, h_1(r)D_{-1}, h_2(r)D_0, h_3(r)D_1,\right)^t,$$

$$\bar{H}_2 = e^{-imt}\left(E_1(r)D_{-1}, E_2(r)D_0, E_3(r)D_1,\right.$$

$$\left. B_1(r)D_1, B_2(r)D_0, B_3(r)D_{-1}\right)^t, \qquad (1)$$

где $D_\alpha = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$ — функции Вигнера, $j = 0,1,2,\ldots,\ m = -j,-j+1,\ldots,j-1,j$. После разделения переменных в [10, 11] была получена система радиальных уравнений:

$$-E_2' - \frac{2}{r}E_2 - \frac{a}{r\sqrt{2}}(E_1 + E_3) = 0,$$

$$imE_1 - B_3' - \frac{1}{r}B_3 + \frac{a}{r\sqrt{2}}B_2 = 0,$$

$$imE_2 - \frac{a}{r\sqrt{2}}(B_1 - B_3) = 0,$$

$$imE_3 + B_1' + \frac{1}{r}B_1 - \frac{a}{r\sqrt{2}}B_2 = 0,$$

$$-imh_1 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_0 = -E_1, \quad -imh_2 - h_0' = -E_2,$$

$$-imh_3 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_0 = -E_3,$$

$$h_3' + \frac{1}{r}h_3 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_2 = -B_1,$$

$$-\frac{a}{r\sqrt{2}}h_1 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_3 = -B_2,$$

$$-h_1' - \frac{1}{r}h_1 - 0 = 0, \quad = -B_3, \qquad (2)$$

где $a = \sqrt{j(j+1)}$ и штрих обозначает производную по r. Известно, что на решениях можно диагонализировать оператор пространственной инверсии [10]. В результате возникают два типа состояний с соответствующими ограничениями на радиальные функции

$$P = (-1)^{j+1}, \quad h_0 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = -h_1,$$

$$E_3 = -E_1, \quad E_2 = 0, \quad B_3 = B_1;$$

$$P = (-1)^j, \quad h_3 = h_1, \quad B_3 = -B_1,$$

$$B_2 = 0, \quad E_3 = E_1. \qquad (3)$$

Отметим, что данная система уравнений должна допускать решения калибровочного типа, т.е. когда $E_i = 0,\ B_i = 0$. При этих ограничениях система (2) принимает вид

$$-imh_1 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_0 = 0, \quad -imh_2 - h_0' = 0,$$

$$-imh_3 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_0 = 0, \quad h_3' + \frac{1}{r}h_3 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_2 = 0,$$

$$-\frac{a}{r\sqrt{2}}h_1 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_3 = 0, \ -h_1' - \frac{1}{r}h_1 - \frac{a}{r\sqrt{2}}h_2 = 0. \qquad (4)$$

Убеждаемся, что при четности $P = (-1)^{j+1}$ уравнения для чисто калибровочных решений имеют только тривиальное нулевое решение: $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 0$. В случае другой четности $P = (-1)^j$ уравнения для калибровочных решений примут вид

$$P = (-1)^j, \quad -imh_1 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_0 = 0,$$

$$-imh_2 - h_0' = 0, \quad h_1' + \frac{1}{r}h_1 + \frac{a}{r\sqrt{2}}h_2 = 0. \qquad (5)$$

С помощью первого и второго уравнений можно исключить переменные h_1 и h_2. В результате приходим к тождеству

$$h_1 = -\frac{ia}{\sqrt{2}rm}h_0, \quad h_2 = \frac{i}{rm}h_0', \quad -\frac{d}{dr}\frac{ia}{\sqrt{2}rm}h_0 -$$

$$-\frac{1}{r}\frac{ia}{\sqrt{2}rm}h_0 + \frac{1}{r}\frac{ia}{\sqrt{2}m}\frac{d}{dr}h_0 = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Таким образом, функция $h_0(r)$ может быть любой $h_0(r) = \Phi(r)$. При этом сопутствующие функции вычисляются по формулам

$$h_3(r) = h_1(r) = -\frac{ia}{\sqrt{2}rm}\Phi(r), \; h_2(r) = \frac{i}{m}\frac{d}{dr}\Phi(r). \tag{6}$$

Данное свойство указывает на калибровочный характер решений.

Возвратимся к общей системе уравнений (4) и учтем ограничения по четности. В случае $P = (-1)^{j+1}$ имеем четыре уравнения

$$\frac{aB_2}{\sqrt{2}r} - B_1^{'} - \frac{B_1}{r} + imE_1 = 0, \quad E_1 = imh_1,$$

$$B_1 = h_1^{'} + \frac{h_1}{r}, \quad B_2 = \frac{\sqrt{2}a}{r}h_1. \tag{7}$$

Исключая из первого уравнения три переменные, находим

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + m^2 - \frac{a^2}{r^2}\right)h_1 = 0. \tag{8}$$

Подстановкой $h_1(r) = r^{-1/2}F(r)$ уравнение можно привести к бесселеву виду

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} + m^2 - \frac{(j+1/2)^2}{r^2}\right)F(r) = 0,$$

$$z = mr, \quad h_1(r) = \frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+1/2}(z). \tag{9}$$

Будем обозначать это решение символом 1:

$$1) \quad P = (-1)^{j+1}, \quad h_0 = h_2 = 0,$$

$$h_3 = -h_1 = -\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+1/2}(z). \tag{10}$$

В случае четности $P = (-1)^j$ получаем шесть уравнений:

$$E_2^{'} + \sqrt{2}\frac{a}{r}E_1 + 2\frac{1}{r}E_2 = 0, \quad B_1^{'} + \frac{B_1}{r} + imE_1 = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{2}aB_1}{r} + imE_2 = 0, \quad E_1 = -\frac{ah_0}{\sqrt{2}r} + imh_1,$$

$$E_2 = h_0^{'} + imh_2, \quad B_1 = -\frac{ah_2}{\sqrt{2}r} - h_1^{'} - \frac{h_1}{r}. \tag{11}$$

Исключая переменные E_1, E_2 и B_1, получаем три уравнения для векторных компонент:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{a^2}{r^2}\right)h_0 + im\frac{\sqrt{2}a}{r}h_1 +$$

$$+im\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)h_2 = 0,$$

$$im\frac{\sqrt{2}a}{2r}h_0 + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + m^2\right)h_1 +$$

$$+\frac{\sqrt{2}a}{2r}\frac{d}{dr}h_2 = 0,$$

$$im\frac{d}{dr}h_0 + \frac{\sqrt{2}a}{2r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)h_1 +$$

$$+\left(\frac{a^2}{r^2} - m^2\right)h_2 = 0. \tag{12}$$

С помощью третьего уравнения можно исключить переменную h_2

$$h_2 = \frac{imr^2}{m^2r^2 - a^2}\frac{d}{dr}h_0 + \frac{\sqrt{2}ar}{m^2r^2 - a^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)h_1. \tag{13}$$

В результате первое и второе уравнения системы (12) приводят к одному и тому же уравнению, в которое входят переменные h_0, h_1

$$\frac{d^2h_1}{dr^2} + \left[\frac{4}{r} - \frac{m}{mr+a} - \frac{m}{mr-a}\right]\frac{dh_1}{dr} +$$

$$+\left[m^2 + \frac{2-a^2}{r^2} + \frac{m^2}{a(mr+a)} - \frac{m^2}{a(mr-a)}\right]h_1 +$$

$$+\frac{ia}{\sqrt{2}mr}\frac{d^2h_0}{dr^2} + \left[\frac{ia\sqrt{2}}{mr^2} + \frac{im}{\sqrt{2}(mr+a)} -\right.$$

$$\left.-\frac{im}{\sqrt{2}(mr-a)}\right]\frac{dh_0}{dr} + \left[\frac{ima}{\sqrt{2}r} - \frac{ia^3}{\sqrt{2}mr^3}\right]h_0 = 0. \tag{14}$$

Его можно решать, накладывая два условия:
либо $h_0 = 0$ и

$$\frac{d^2h_1}{dr^2} + \left[\frac{4}{r} - \frac{m}{mr+a} - \frac{m}{mr-a}\right]\frac{dh_1}{dr} +$$

$$+\left[m^2 + \frac{2-a^2}{r^2} + \frac{m^2}{a(mr+a)} - \frac{m^2}{a(mr-a)}\right]h_1 = 0, \tag{15}$$

либо $h_1 = 0$ и

$$\frac{ia}{\sqrt{2}mr}\frac{d^2h_0}{dr^2} + \left[\frac{ia\sqrt{2}}{mr^2} + \frac{im}{\sqrt{2}(mr+a)} -\right.$$

$$\left.-\frac{im}{\sqrt{2}(mr-a)}\right]\frac{dh_0}{dr} + \left[\frac{ima}{\sqrt{2}r} - \frac{ia^3}{\sqrt{2}mr^3}\right]h_0 = 0. \tag{16}$$

Эти уравнения принадлежат классу общего уравнения Гойна, т.е. имеют четыре регулярные особые точки.

Вернемся к системе (12) и будем искать такое преобразование переменных, которое избавляет уравнения от мнимой единицы и квадратных корней. Существуют две возможности:

$$I. \quad h_0 = \sqrt{2(j+1)}H_0, \quad h_1 = i\sqrt{j}H_1,$$

$$h_2 = i\sqrt{2(j+1)}H_2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j}{r^2}\right)H_0 - m\frac{j}{r}H_1 -$$

$$-\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)H_2 = 0,$$

$$m\frac{j+1}{r}H_0+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+m^2\right)H_1+$$

$$+\frac{j+1}{r}\frac{d}{dr}H_2=0,$$

$$m\frac{d}{dr}H_0+\frac{j}{r}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+$$

$$+\left(\frac{j(j+1)}{r^2}-m^2\right)H_2=0; \qquad (17)$$

$$II. \quad h_0=i\sqrt{2j}H_0, \quad h_1=\sqrt{j+1}H_1,$$

$$h_2=\sqrt{2j}H_2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_0+m\frac{j+1}{r}H_1+$$

$$+m\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)H_2=0,$$

$$-m\frac{j}{r}H_0+\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+m^2\right)H_1+$$

$$+\frac{j}{r}\frac{d}{dr}H_2=0,$$

$$-m\frac{d}{dr}H_0+\frac{j+1}{r}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+$$

$$+\left(\frac{j(j+1)}{r^2}-m^2\right)H_2=0. \qquad (18)$$

Рассмотрим случай I. Подставив выражения для H_2 в первое и второе уравнения из (12), приходим к уравнению следующего вида

$$\frac{d^2H_1}{dr^2}+\left[\frac{4}{r}-\frac{2m^2r}{m^2r^2-j(j+1)}\right]\frac{dH_1}{dr}+$$

$$+\left[m^2+\frac{2-j(j+1)}{r^2}-\frac{2m^2r}{m^2r^2-j(j+1)}\right]H_1+$$

$$+(j+1)\left\{\frac{1}{mr}\frac{d^2H_0}{dr^2}+\left[\frac{2}{mr^2}-\frac{2m}{m^2r^2-j(j+1)}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{dH_0}{dr}+\left[\frac{m}{r}-\frac{j(j+1)}{r^3m}\right]H_0\right\}=0. \qquad (19)$$

Данное уравнение можно, например, решать так:

пусть $H_0(r)=0$, тогда

$$\frac{d^2H_1}{dr^2}+\left[\frac{4}{r}-\frac{2m^2r}{m^2r^2-j(j+1)}\right]\frac{dH_1}{dr}+$$

$$+\left[m^2+\frac{2-j(j+1)}{r^2}-\frac{2m^2r}{m^2r^2-j(j+1)}\right]H_1=0; \qquad (20)$$

пусть $H_1(r)=0$, тогда

$$\frac{d^2H_0}{dr^2}+\left[\frac{2}{r}-\frac{2m^2r}{m^2r^2-j(j+1)}\right]\frac{dH_0}{dr}+$$

$$+\left[m^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right]H_0=0. \qquad (21)$$

Оба уравнения принадлежат классу общего уравнения Гойна.

Аналогично рассматриваем случай II. В результате приходим к уравнению (19), в котором множитель $(j+1)$ перед функцией H_0 заменен на j. Естественно, что его решения совпадают с (20) и (21).

Ниже будет изложен другой способ анализа, приводящий к возможности построить решения в функциях Бесселя. Для этого нужно будет наложить условие Лоренца.

2. Условие Лоренца

Условие Лоренца должно быть пересчитано к тетрадному представлению

$$\nabla_\alpha\Psi^\alpha=0, \quad \nabla_\alpha e^\alpha_{(a)}\Psi^\alpha=0,$$

$$(\nabla_\alpha e^\alpha_{(a)})\Psi^\alpha+e^\alpha_{(a)}\partial_\alpha\Psi^\alpha=0. \qquad (22)$$

Здесь предполагается использование декартового базиса. С учетом известного соотношения

$$\nabla_\alpha e^\alpha_{(a)}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{-g}e^\alpha_{(a)}$$

находим

$$\nabla_\alpha e^\alpha_{(0)}=0, \quad \nabla_\alpha e^\alpha_{(1)}=\frac{\cos\theta}{r\sin\theta},$$

$$\nabla_\alpha e^\alpha_{(2)}=0, \quad \nabla_\alpha e^\alpha_{(a)}=\frac{2}{r}.$$

Следовательно, условие Лоренца примет вид

$$\partial_t\Phi_0-\frac{1}{r}\left(\partial_\theta+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\Psi_1-$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\Psi_2-\left(\partial_r+\frac{2}{r}\right)\Phi_3=0. \qquad (23)$$

При разделении переменных в уравнении Даффина-Кеммера использовался циклический базис. Нужное преобразование над 4-векторной составляющей $\bar{H}_1=UH_1$ задается следующей матрицей

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$U^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

т. е. функции из (23) выражаются через циклические компоненты так:

$$\Psi_0=\bar{\Psi}_0, \quad \Psi_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3,$$

$$\Psi_2=-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3, \quad \Psi_3=\bar{\Psi}_3. \qquad (25)$$

При этом условие Лоренца (23) примет вид

$$\partial_t \bar{\Psi}_0 - \frac{1}{r}\left(\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3\right) -$$

$$-\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3\right) - \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\bar{\Psi}_2 = 0. \quad (26)$$

Подстановка для векторной части волновой функции в циклическом базисе имеет вид

$$\bar{H}_1 = e^{-imt}\left(\begin{array}{c} h_0(r)D_0 \\ h_1(r)D_{-1} \\ h_2(r)D_0 \\ h_3(r)D_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \bar{\Psi}_0 \\ \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_2 \\ \bar{\Psi}_3 \end{array}\right). \quad (27)$$

Для функций Вигнера D выполняются рекуррентные соотношения [11]:

$$\partial_\phi D_\sigma = imD_\sigma, \quad \partial_\theta D_0 = \frac{a}{2}D_{-1} - \frac{a}{2}D_1,$$

$$\frac{-m}{\sin\theta}D_0 = -\frac{a}{2}D_{-1} - \frac{a}{2}D_1, \quad \partial_\theta D_1 = \frac{a}{2}D_0 - \frac{b}{2}D_2,$$

$$\frac{-m-\cos\theta}{\sin\theta}D_1 = -\frac{a}{2}D_0 - \frac{b}{2}D_2,$$

$$\partial_\theta D_{-1} = \frac{b}{2}D_{-2} - \frac{b}{2}D_2,$$

$$\frac{-m-\cos\theta}{\sin\theta}D_{-1} = -\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0, \quad (28)$$

где $a = \sqrt{j(j+1)}, \ b = \sqrt{(j-1)(j+2)}$. В связи с этим из (26) получаем

$$-imh_0D_0 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\partial_\theta D_{-1} + \frac{-m+\cos\theta}{\sin\theta}D_{-1}\right)h_1 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(-\partial_\theta D_1 + \frac{-m-\cos\theta}{\sin\theta}D_1\right)h_3 -$$

$$-\left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)h_2D_0 = 0.$$

Учтем в последнем соотношении рекуррентные формулы из (28)

$$-imh_0D_0 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\left[\left(\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0\right)\right]h_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r}\left[-\left(\frac{a}{2}D_0 - \frac{b}{2}D_2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\frac{a}{2}D_0 - \frac{b}{2}D_2\right)\right]h_3 - \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)h_2D_0 = 0,$$

откуда после приведения подобных находим

$$-imh_0D_0 - \frac{a}{\sqrt{2}r}h_1D_0 - \frac{a}{\sqrt{2}r}h_3D_0 -$$

$$-\left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)h_2D_0 = 0.$$

Таким образом, приходим к радиальному условию Лоренца

$$-imh_0 - \frac{a}{\sqrt{2}r}h_1 - \frac{a}{\sqrt{2}r}h_3 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h_2 = 0.$$

Учет ограничения по четности дает

$$P = (-1)^{j+1}, \quad h_0 = h_2 = 0, \quad h_3 = -h_1, \quad (29)$$

что приводит к тождеству $0 \equiv 0$. Для $P = (-1)^j$ и $h_3 = h_1$ уравнение принимает вид

$$-imh_0 - \frac{2a}{\sqrt{2}r}h_1 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h_2 = 0. \quad (30)$$

Условие (30) позволяет из системы трех уравнений (12) исключить переменную h_0

$$-imh_0 = \frac{2a}{\sqrt{2}r}h_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{dr}\right)h_2.$$

Рассматриваем по отдельности подстановки I (17) и II (18). Уравнения (17) дополняются условием Лоренца

$$-mH_0 = \frac{j}{r}H_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)H_2, \quad (31)$$

а для уравнений (18) условие Лоренца имеет вид

$$mH_0 = \frac{j+1}{r}H_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)H_2. \quad (32)$$

В случае I первое и второе уравнения системы (17) после исключения функции H_2 с помощью третьего уравнения приводят к одному и тому же уравнению, одно из них можем отбросить, например первое. Из условия Лоренца (31) выразим переменную H_0 и подставим в третье уравнение системы (17), в результате получим

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + m^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_1 = \frac{2(j+1)}{r^2}H_2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + m^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_2 = \frac{2j}{r^2}H_1 + \frac{2}{r^2}H_2, \quad (33)$$

или в матричной форме

$$\Delta\left(\begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \end{array}\right) = \frac{2}{r^2}\left(\begin{array}{cc} 0 & j+1 \\ j & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} H_1 \\ H_2 \end{array}\right).$$

Диагонализируем матрицу смешивания

$$\bar{H} = T_1H, \ T_1\Delta T_1^{-1}\bar{H} = T_1AT_1^{-1}\bar{H}, \ H = T_1^{-1}\bar{H},$$

$$T_1AT_1^{-1} = \left(\begin{array}{cc} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -j & 0 \\ 0 & j+1 \end{array}\right),$$

$$T_1 = \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & \frac{j+1}{j} \end{array}\right), \ T_1^{-1} = \frac{1}{2j+1}\left(\begin{array}{cc} j+1 & j \\ -j & j \end{array}\right).$$

В результате система (33) преобразуется в следующую

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + m^2 - \frac{j(j-1)}{r^2}\right)\bar{H}_1 = 0,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + m^2 - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2}\right)\bar{H}_2 = 0. \quad (34)$$

Простой подстановкой данные уравнения приводятся к бесселевому виду

$$\bar{H}_1(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\bar{F}_1(r),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+m^2-\frac{(j-1/2)^2}{r^2}\right)\bar{F}_1=0,$$

$$\bar{H}_2(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\bar{F}_2(r),$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+m^2-\frac{(j+3/2)^2}{r^2}\right)\bar{F}_2=0,$$

$$I. \quad z=mr, \quad \bar{H}_1(r)=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}(z),$$

$$\bar{H}_2(r)=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}(z). \qquad (35)$$

Исходные функции задаются соотношениями

$$I. \quad H_1=\frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1+\frac{j}{2j+1}\bar{H}_2,$$

$$H_2=-\frac{j}{2j+1}\bar{H}_1+\frac{j}{2j+1}\bar{H}_2. \qquad (36)$$

Рассмотрим случай II. Первое и второе уравнения системы (32) после исключения функции H_2 с помощью третьего уравнения приводят к одному и тому же уравнению, одно из них можем отбросить, например первое. Из условия Лоренца выразим переменную H_0 и подставим в третье уравнение системы (31), в результате получим

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+m^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_1=\frac{2j}{r^2}H_2,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+m^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_2=$$

$$=\frac{2(j+1)}{r^2}H_1+\frac{2}{r^2}H_2$$

$$\Delta\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}=\frac{2}{r^2}\begin{pmatrix} 0 & j \\ j+1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}.$$

Диагонализируем матрицу смешивания

$$\begin{pmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{pmatrix}=T_2\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix},$$

$$T_2AT_2^{-1}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & j+1 \end{pmatrix},$$

$$T_2=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{j}{j+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ T_2^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{j+1}{2j+1} & \frac{j}{2j+1} \\ -\frac{j+1}{2j+1} & \frac{j+1}{2j+1} \end{pmatrix}.$$

В результате уравнения примут вид (34). Простой подстановкой они приводятся к уравнениям Бесселя (35). Исходные функции строятся так:

$$II. \quad H_1''=\frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1+\frac{j}{2j+1}\bar{H}_2,$$

$$H_2''=-\frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1+\frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_2. \qquad (37)$$

Таким образом, в двух ситуациях получаем решения (36) и (37), в которых

$$\bar{H}_1(r)=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}(z), \quad \bar{H}_2(r)=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}(z).$$

Легко убедиться, что два решения I (36) и II (37) связаны линейным преобразованием

$$H^{II}=T_2^{-1}T_1H^I=$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{j+1}{2j+1} & \frac{j}{2j+1} \\ -\frac{j+1}{2j+1} & \frac{j+1}{2j+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{j+1}{j} \end{pmatrix}H^I=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{j+1}{j} \end{pmatrix}H^I. \qquad (38)$$

Следовательно, мы можем использовать только один случай: либо I , либо II (для определенности будем использовать вариант I). Причем, поскольку уравнения для функций H_1 и $\bar{H}_1$ не связаны между собой, то два линейно независимых решения можно выбрать так (обозначаем их символами 2 и 3):

$$2) \quad \bar{H}_1=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}, \quad H_1=\frac{j+1}{2j+1}\bar{H}_1,$$

$$H_2=-\frac{j}{2j+1}\bar{H}_1, \quad H_0=-\frac{j}{z}H_1-\left(\frac{d}{dz}+\frac{2}{z}\right)H_2; \qquad (39)$$

$$3) \quad \bar{H}_2=\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}, \quad H_1=\frac{j}{2j+1}\bar{H}_2,$$

$$H_2=\frac{j}{2j+1}\bar{H}_2, \quad H_0=-\frac{j}{z}H_1-\left(\frac{d}{dz}+\frac{2}{z}\right)H_2. \qquad (40)$$

Преобразуем эти решения к переменным h_i

$$h_0=\sqrt{2(j+1)}H_0, \quad h_3=h_1=i\sqrt{j}H_1,$$

$$h_2=i\sqrt{2(j+1)}H_2.$$

В результате получаем

$$2) \quad h_3=h_1=i\sqrt{j}\frac{j+1}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2},$$

$$h_2=-i\frac{j\sqrt{2(j+1)}}{(2j+1)}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2},$$

$$h_0=\frac{j\sqrt{2(j+1)}}{(2j+1)}\left[\frac{d}{dz}-\frac{j-1}{z}\right]\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j-1/2}; \qquad (41)$$

$$3) \quad h_3=h_1=i\sqrt{j}\frac{j}{2j+1}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2},$$

$$h_2=i\frac{j\sqrt{2(j+1)}}{(2j+1)}\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2},$$

$$h_0=-\frac{j\sqrt{2(j+1)}}{(2j+1)}\left[\frac{d}{dz}+\frac{j+2}{z}\right]\frac{1}{\sqrt{z}}J_{j+3/2}. \qquad (42)$$

3. Градиентное решение

Известно, что должны существовать калибровочные решения градиентного типа. Найдем их явный вид, исходя из определения

$$\Psi_\alpha(x) = \partial_\alpha \Lambda(x), \quad \Lambda(x) = e^{-imt} D_0 f(r),$$
$$D_0 = D^j_{-m,0}(\theta, \phi, 0). \tag{43}$$

Тетрадное представление этого решения $\Psi_\alpha(x) = e^\beta_{(a)} D_0 f(r)$ имеет вид

$$\Psi_{(0)} = e^\beta_{(0)} \Psi_\beta = -ime^{-imt} D_0 f,$$
$$\Psi_{(3)} = e^\beta_{(3)} \Psi_\beta = e^{-imt} \frac{df}{dr} D_0,$$
$$\Psi_{(1)} = e^\beta_{(1)} \Psi_\beta = e^{-imt} \frac{f}{r} \partial_\theta D_0,$$
$$\Psi_{(2)} = e^\beta_{(2)} \Psi_\beta = e^{-imt} \frac{f}{r} \frac{im}{\sin\theta} D_0.$$

Преобразуя вектор $\Psi_{(a)}$ к циклическим компонентам

$$\Psi_0 = \bar{\Psi}_0, \quad \Psi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_3,$$
$$\Psi_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_3, \quad \Psi_3 = \bar{\Psi}_2,$$

получаем

$$\bar{\Psi}_{(0)} = -ime^{-imt} D_0 f, \quad \bar{\Psi}_2 = e^{-imt} \frac{df}{dr} D_0,$$
$$\bar{\Psi}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-imt} \frac{f}{r} \left(\partial_\theta + \frac{m}{\sin\theta} \right) D_0,$$
$$\bar{\Psi}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-imt} \frac{f}{r} \left(\partial_\theta - \frac{m}{\sin\theta} \right) D_0. \tag{44}$$

Отсюда находим

$$\bar{\Psi}_0 = -ime^{-imt} D_0 f = e^{-imt} \bar{h}_0 D_0,$$
$$\bar{\Psi}_2 = e^{-imt} \frac{df}{dr} D_0 = e^{-imt} \bar{h}_2 D_0,$$
$$\bar{\Psi}_1 = -\frac{a}{\sqrt{2}} e^{-imt} \frac{1}{r} f D_{-1} = e^{-imt} \bar{h}_1 D_{-1},$$
$$\bar{\Psi}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-imt} \frac{a}{r} f D_1 = e^{-imt} \bar{h}_3 D_1. \tag{45}$$

Таким образом, выражения для радиальных компонент калибровочного вектора имеют вид

$$\bar{h}_0(r) = -imf(r), \quad \bar{h}_2(r) = \frac{df}{dr} f(r),$$
$$\bar{h}_1(r) = \bar{h}_3(r) = -\frac{j(j+1)/2}{r} f(r). \tag{46}$$

Принимая во внимание ограничения по четности, заключаем, что построенное калибровочное решение имеет четность $P = (-1)^j$.

Будем предполагать, что скалярная функция $\Lambda(x)$ является решением уравнения Клейна-Фока-Гордона

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Lambda(x) = 0,$$
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} l^2 \right] \Lambda(x) = 0.$$

С учетом подстановки $\Lambda(x) = e^{-imt} f(r) D^j_{-m,0}(\phi, \theta, 0)$ имеем радиальное уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + m^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] f(r) = 0. \tag{47}$$

Подстановкой $f(r) = r^{-1/2} F(r)$ его можно привести к бесселеву типу с переменной $z = mr$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + m^2 - \frac{(j+1/2)^2}{r^2} \right] F(r) = 0,$$
$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z). \tag{48}$$

В результате находим четвертое решение

$$4) \quad h_0 = -\frac{i}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z), \quad h_2 = \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z),$$
$$h_1 = h_3 = -\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}} \frac{1}{z\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z). \tag{49}$$

4. Сводка результатов

Найдены четыре решения уравнения для безмассового поля со спином 1. Первое (10) имеет вид

$$1) \quad P = (-1)^{j+1}, \quad h_0 = h_2 = 0,$$
$$h_3 = -h_1 = -\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z). \tag{50}$$

Второе (41) можно переписать в форме

$$2) \;\; h_3 = h_1 = i\sqrt{j} \frac{j+1}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} = A_1 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},$$
$$h_2 = -i \frac{j\sqrt{2(j+1)}}{(2j+1)} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} = A_2 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},$$
$$h_0 = -\frac{j\sqrt{2(j+1)}}{(2j+1)} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} = A_0 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}. \tag{51}$$

Аналогично для третьего решения (42) имеем

$$3) \quad h_3 = h_1 = i \frac{j\sqrt{j}}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} = A_1 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},$$
$$h_2 = i \frac{j\sqrt{2(j+1)}}{(2j+1)} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} = A_2 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},$$
$$h_0 = -\frac{j\sqrt{2(j+1)}}{(2j+1)} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} = A_0 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}. \tag{52}$$

Четвертое решение описывается формулами (49).

Эти решения можно проверить подстановкой в исходную систему (2), исключая в ней переменные E_i, B_i . Для решения 1 получаем тождества. Для решения 2

$$2) \quad h_0 = \frac{B_0}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_1 = h_3 = \frac{B_1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},$$

$$h_2 = \frac{B_2}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}$$

получаем

$$B_0 = \frac{ij\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}} B_1, \quad B_2 = -\frac{j\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}} B_1.$$

Для решения 3

$$3) \quad h_0 = \frac{B_0}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_1 = h_3 = \frac{B_1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},$$

$$h_2 = \frac{B_2}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}$$

получаем

$$B_0 = \frac{i(j+1)\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}} B_1, \quad B_2 = \frac{(j+1)\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}} B_1.$$

Для решения 4 получаем тождества. В случае 2 убеждаемся, что оба ответа приводят к одному и тому же результату

$$2) \quad \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} = \frac{ij\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}},$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = -\frac{j\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}}.$$

В случае 3 убеждаемся, что оба ответа также приводят к одному и тому же результату

$$3) \quad \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} = \frac{i(j+1)\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}},$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{(j+1)\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}}.$$

Следует отметить, что из решений типа 2 и 3 можно образовать специальную линейную комбинацию, которая соответствует второму калибровочному решению (согласно общей теории, из четырех решений два должны быть калибровочными, а два — физически интерпретируемыми)

$$\frac{2j+1}{j+1} h_1^{(2)} + \frac{2j+1}{j} h_1^{(3)} = i\frac{\sqrt{j}}{\sqrt{z}} \left(J_{j-1/2} + J_{j+3/2} \right) =$$

$$= i\frac{\sqrt{j}}{\sqrt{z}} (2j+1) \frac{1}{z} J_{j+1/2}. \qquad (53)$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{j+1} h_1^{(2)} + \frac{1}{j} h_1^{(3)} = i\sqrt{j} \frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}.$$

Далее находим, что

$$\frac{1}{j(j+1)} \left(j h_1^{(2)+(j+1)h_1^{(3)}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{j(j+1)}} (2j+1) \left(-i\frac{1}{\sqrt{z}} h_0 \right).$$

Таким образом, найденная комбинация соответствует второму калибровочному решению

$$h_1^{gauge} \equiv \frac{j}{2j+1} h_1^{(2)} + \frac{j+1}{2j+1} h_1^{(3)} =$$

$$= -i\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}} \frac{1}{z} h_0^{gauge}, \qquad (54)$$

где

$$h_0^{gauge} = -\sqrt{2(j+1)} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{z} J_{j+1/2}.$$

Заключение

Построенные четыре независимых решения для безмассовой частицы со спином 1 позволяют найти явные выражения для четырех калибровочных решений системы уравнений Паули-Фирца для безмассовой частицы со спином 2. Причем, в силу свойств функций Бесселя, соответствующие четыре набора 11-компонентных полевых функций для частицы со спином 2 оказываются имеющими схожую структуру: они выражаются с точностью до множителя $1/\sqrt{z}$ через функции Бесселя с индексами $p = j-3/2, j-1/2, j+1/2, j+3/2, j+5/2$. Это позволяет предположить, что все решения основной системы радиальных уравнений, а не только калибровочные, также имеют схожую структуру. Основная система радиальных уравнений имеет вид 11-связанных дифференциальных уравнений 2-го порядка для 11-функций. Диагонализация оператора пространственного отражения позволяет разбить эту сложную систему на две подсистемы: одна из них оказывается простой и легко решаемой в функциях Бесселя, причем отмеченная простая структура решений в терминах функций Бесселля также сохраняется. Вместе с тем легко показать, что данное решение не является калибровочным. Вторая система оказывается намного более сложной, состоящей из восьми связанных уравнений. Однако можно убедиться, что подстановки для отдельных функций с отмеченной выше общей структурой позволяют с использованием свойств функций Бесселя преобразовать систему восьми радиальных уравнений в алгебраическую систему, хотя и довольно громоздкую. Этот дополнительный анализ является предметом отдельной работы.

Литература

1. Pauli, W. Über relativistische feldleichungen von teilchen mit beliebigem spin im elektromagnetishen feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Федоров, Ф.И. К теории частицы со спином 2 / Ф.И. Федоров // Уч. зап. БГУ. Сер. физ.-мат. – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.

4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5. – № 2. – P. 325–326.
5. Богуш, А.А. Об уравнениях для частицы со спином 2 во внешних электромагнитных и гравитационных полях / А.А. Богуш, В.В. Кисель, Н.Г. Токаревская, В.М. Редьков // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 1. – С. 62–67.
6. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, V.V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6. – No. 3. – P. 772–778.
7. Кисель, В.В. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергииимпульса безмассового поля со спином 2 / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 58–63.
8. Кисель, В.В. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / В.В. Кисель, Е.М. Овсиюк, О.В. Веко, В.М. Редьков // Доклады НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59. – № 3. – С. 21–27.
9. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2009. – 486 с.
10. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Минск: Белорусская наука, 2011. – 339 с.
11. Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Ленинград: Наука, 1975. – 439 с.

References

1. Pauli, W. Über relativistische feldleichungen von teilchen mit beliebigem spin im elektromagnetishen feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – P. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Fedorov, F.I. K teorii chasticy so spinom 2 [On the theory of the spin 2 particle] / F.I. Fedorov // Uch. zap. BGU. Ser. fiz.-mat. [Proceedings of Belorussian State University. Ser. phys.-math.]. – 1951. – Iss. 12. – P. 156–173.
4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5. – № 2. – P. 325–326.
5. Bogush, A.A. Ob uravnenijah dlja chasticy so spinom 2 vo vneshnih jelektromagnitnyh i gravitacionnyh poljah [On equations for spin 2 particle in external electromagnetic and gravitational fields] / A.A. Bogush, V.V. Kisel, N.G. Tokarevskaya, V.M. Red'kov // Vesci NANB. Ser. fiz.-mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 2003. – № 1. – P. 62–67.
6. Red'kov, V.M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V.M. Red'kov, N.G. Tokarevskaya, V.V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6. – No. 3. – P. 772–778.
7. Kisel, V.V. Analiz vklada kalibrovochnyh stepenej svobody v strukturu tenzora jenergiiimpul'sa bezmassovogo polja so spinom 2 [Contribution of the gauge degrees of freedom in energy-momentum tensor of the massless spin 2 field] / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Vesci NAN Belarusi. Ser. fiz. mat. navuk [Proceedings of NAS of Belarus. Ser. phys.-math.]. – 2015. – № 2. – P. 58–63.
8. Kisel, V.V. Nereljativistskij predel v teorii chasticy so spinom 2 [Nonrelativistic approximation in the theory of spin 2 particle] / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, O.V. Veko, V.M. Red'kov // Doklady NAN Belarusi [Doklady NAS of Belarus]. – 2015. – Vol. 59. – № 3. – P. 21–27.
9. Red'kov, V.M. Polja chastic v rimanovom prostranstve i gruppa Lorenca [Fields of particles in the Riemannian space and the Lorentz group] / V.M. Red'kov. – Minsk: Belorusskaja nauka [Belarusian Science], 2009. – 486 p.
10. Red'kov, V.M. Tetradnyj formalizm, sfericheskaja simmetrija i bazis Shredingera [Tetrad formalism, spherical symmetry and Schrödinger basis] / V.M. Red'kov. – Minsk: Belorusskaja nauka [Belarusian Science], 2011. – 339 p.
11. Varshalovich, D.A. Kvantovaja teorija uglovogo momenta [Quantum theory of angular momentum] / D.A. Varshalovich, A.N. Moskalev, V.K. Khersonskii – Leningrad: Nauka [Science], 1975. – 439 p.

Для цитирования:
Ивашкевич, А.В. Точные решения уравнения для векторной частицы с нулевой массой и калибровочная симметрия для поля со спином 2 / А.В. Ивашкевич, А.В. Бурый, Е.М. Овсиюк // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 60–68. УДК: 539.12. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-60-68

For citation:
Ivashkevich, A.V. Exact solutions of the equation for a vector particle with zero mass and gauge symmetry for a field with spin 2 / A.V. Ivashkevich, A.V. Bury, E.M. Ovsiyuk // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 60–68. UDC: 539.12. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-60-68

Дата поступления рукописи: 15.08.2022
Received: 15.08.2022