УДК 539.3
DOI 10.19110/1994-5655-2024-5-22-27

Об устойчивости круговых подкрепленных арок в случае пространственной деформации

В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН, г. Сыктывкар

veran@list.ru
vntarasov@dm.komisc.ru

Аннотация

В работе рассматривается круговая арка, нагруженная равномерно распределенным нормальным давлением, направленным к центру. Концы арки прикреплены тросами, один конец которых прикреплен к дуге арки под соответствующим углом, и расстояние между точками прикрепления тросов не может увеличиваться. Определены значения давления, при которых возможны искривленные формы равновесия арки, и найдено наименьшее из этих значений, являющееся критической силой.

Ключевые слова:

устойчивость, круговая арка, вариационная задача, точки бифуркации, односторонние ограничения, критическая сила

On the stability of circular reinforced arches in the case of spatial deformation

V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS, Syktyvkar

veran@list.ru
vntarasov@dm.komisc.ru

Abstract

The work considers a circular arch loaded with uniformly distributed normal pressure directed towards the centre. The ends of the arch are attached with cables, one end of which is attached to the arc of the arch at an appropriate angle, and the distance between the points of attachment of the cables cannot be increased. We estimated pressure values, at which curved equilibrium forms of the arch are possible, and the smallest of these values is found, which is the critical force.

Keywords:

stability, circular arch, variational problem, bifurcation points, one-sided constraints, critical force

Введение

Расчет на устойчивость сложных тонкостенных конструкций связан с исследованием вариационных неравенств или решением вариационных задач с ограничениями на искомые функции в форме неравенств. Проблема устойчивости круговых арок раннее рассматривалась Е. Л. Николаи [1]. При апроксимации перемещений использовали сплайн-функции [2], для решения подобных задач применяли метод глобальной оптимизации [3]. Экспериментальное и численное изучение влияния односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек, сжимаемых продольной силой, осуществлял Н. А. Алфутов в труде [4]. Некоторые задачи устойчивости и закритического поведения при наличии односторонних ограничений на перемещения рассмотрены в работах [5–7]. В предлагаемой статье рассматривается проблема круговых арок, нагруженных равномерно распределенным нормальным давлением, направленным к центру. Концы арки закреплены откосами так, что расстояние между точками прикрепления откосов не может изменяться.

1. Устойчивость арок с односторонним подкреплением

Пусть криволинейный стержень представляет собой дугу окружности радиуса R. Стержень нагружен давлением P, равномерно распределенным вдоль дуги и направленным к центру ее кривизны. Уравнения недеформированной оси арки имеют вид:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi, \quad \varphi\in(-\tau,\tau) \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим единичные векторы нормали, касательной и бинормали к кривой (1) через

$$\begin{cases} \eta = (-\sin\varphi, \cos\varphi), \\ \xi = (-\cos\varphi, -\sin\varphi), \\ \zeta = \eta\times\xi. \end{cases}$$

Перемещение точек арки описывается вектором

$$g = u(\varphi)\xi + w(\varphi)\eta + v(\varphi)\zeta. \tag{2}$$

Здесь $w(\vartheta)$ — радиальное перемещение (прогиб), $v(\vartheta)$ — касательное перемещение.

Пусть ξ_*, η_*, ζ_* — нормаль, касательная и бинормаль к деформированной кривой. Векторы ξ, η, ζ переходят в ξ_*, η_*, ζ_* путем поворота на малые углы α, β, γ, которые связаны с перемещениями формулами [2]:

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{R}(u' + w), \\ \alpha = -\frac{1}{R}v', \\ w' = u. \end{cases} \tag{3}$$

Деформация стержня характеризуется величинами

$$\begin{cases} \delta p = \frac{1}{R}(\alpha' + \gamma), \\ \delta q = \frac{1}{R^2}\beta', \\ \delta r = \frac{1}{R}(\gamma' + \frac{1}{R}v'). \end{cases}$$

С учетом (3) формулы примут вид:

$$\begin{cases} \delta p = -\frac{1}{R^2}v'' + \frac{1}{R}\gamma, \\ \delta q = \frac{1}{R^2}(u'' + u), \\ \delta r = \frac{1}{R}(\gamma' + \frac{1}{R}v'). \end{cases} \quad (4)$$

Упругая энергия стержня в квадратичном приближении определяется функционалом

$$U = \int_{-\tau}^{\tau}\Big(\frac{B}{2R^3}(u'' + u)^2 + \frac{A}{2R^2}(\gamma - \frac{1}{R}v'')^2 + $$

$$+\frac{C}{2R^2}(\gamma' + \frac{1}{R}v'')^2\Big)d\varphi,$$

а работа внешних сил может быть вычислена по формуле PW, где

$$W = \frac{1}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\Big(u'^2 - 2u^2 + v'^2 - v^2\Big)d\varphi.$$

В выражении для упругой энергии введены обозначения A, B — жесткости стержня на изгиб, C — жесткость стержня на кручение.

В положении равновесия полная энергия

$$J = U - PW$$

принимает минимальное (стационарное) значение. Нетрудно увидеть, что поиск критической нагрузки сводится к решению задачи изопериметрического типа

$$\begin{array}{l} U \to \min\limits_{u,v,w}, \\ W = 1. \end{array} \quad (5)$$

1.1. Аналитическое решение. Ясно, что множитель Лагранжа в задаче (5) определяет критическую нагрузку. Уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \frac{d^2}{d\varphi^2}F_{u''} - \frac{d}{d\varphi}F_{u'} + F_u = 0, \\ \frac{d^2}{d\varphi^2}F_{v''} - \frac{d}{d\varphi}F_{v'} + F_v = 0, \\ -\frac{d}{d\varphi}F_{\gamma'} + F_\gamma = 0 \end{cases}$$

для функционала J имеют вид:

$$\frac{B}{R^3}\Big(u^{IV} + 2u'' + u\Big) + P\Big(u'' + 2u\Big) \quad (6)$$

$$\begin{array}{l} \frac{A}{R^3}v^{IV} - \frac{A}{R^2}\gamma'' - \frac{C}{R^3}v'' - \frac{C}{R^2}\gamma'' + P(v'' - v) = 0, \\ \frac{A}{R^3}v'' - \frac{A}{R^2}\gamma + \frac{C}{R^3}v'' + \frac{C}{R^2}\gamma'' = 0. \end{array} \quad (7)$$

Система уравнений Эйлера разделяется на две независимые подсистемы: уравнение (6) описывает деформацию арки в ее первоначальной плоскости, уравнения (7) описывают пространственную деформацию. Уравнения (6) и (7) совпадают с уравнениями, приведенными в [2].

Предположим, что арка подкреплена тросами, один конец которых прикреплен к дуге арки под соответствующим углом

$$\varphi_j = -\tau + \frac{2\tau}{M+1}j, \;\; j = 1, \ldots, M,$$

а другой — к точкам с координатами

$$\begin{cases} x_j = -\tau + \frac{2\tau}{M+1}j, \;\; j = 1, \ldots, M, \\ y = 0, \\ z = \pm z_0 \end{cases}$$

так, что расстояние между точками прикрепления тросов не может увеличиваться. Для увеличения критической силы в случае пространственной деформации получаем при $\varphi = \varphi_j, \;\; j = 1, \ldots, M$ равенства

$$v_j = 0. \quad (8)$$

На плоскую форму потери устойчивости ограничения (8) никак не влияют. Если одновременно учитывать как плоскую, так и пространственную деформацию, то вместо (8) приходим к неравенствам

$$-Ru \pm 2vz_0 \leqslant 0 \quad (9)$$

при $\varphi = \varphi_j, \;\; j = 1, \ldots, M$. Можно показать, что задача определения критической силы может быть сведена к вариационной проблеме изопериметрического типа (5) и выполнению неравенств (9). Решение задачи (5)–(9) существенно зависит от постоянных A, B, C (A,B — жесткости при изгибе, C — жесткость на кручение), которые определяются формой поперечного сечения стержня. В случая, когда сечение стержня есть эллипс с полуосями a, b, то

$$A = \frac{\pi}{4}Ea^3b, \;\; B = \frac{\pi}{4}Eab^3, \;\; C = \frac{\pi E a^3 b^3}{(1+\nu)(a^2+b^2)},$$

E — модуль Юнга материала. Не умаляя общности, можно считать, что $E = 1$.

1.2. Численный метод. Будем аппроксимировать функции u, v, w, γ интерполяционными кубическими сплайнами вида [3]:

$$\begin{array}{l} S(z,\varphi) = z_i(1-t)^2(1+2t) + \\ +z_{i+1}t^2(3-2t) + \\ +m_i h t(1-t)^2 - m_{i+1}ht^2(1-t), \end{array} \quad (10)$$

где вектор z имеет размерность $4n$, а

$$m_i = S'(z,\varphi_i), \quad i = 0, ..., n+1,$$

$$h = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad t = (\varphi - \varphi_i)/h, \quad t \in [0,1].$$

При аппроксимации прогиба u

$$z_i = u_i = u(\varphi_i), \;\; \varphi_i = i \cdot h, \quad i = 1, \ldots, n$$

аналогично приближаются остальные функции v, w, γ:

$$z_{i+n} = u_i = u(\varphi_i), \;\; \varphi_i = i \cdot h, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$z_{i+2n} = v_i = v(\varphi_i), \;\; \varphi_i = i \cdot h, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$z_{i+3n} = w_i = w(\varphi_i), \;\; \varphi_i = i \cdot h, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В случае граничных условий шарнирного опирания условие непрерывности второй производной записывается в виде [2]:

$$2m_0 + \mu_0^* m_1 = c_0^*,$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \mu_i m_{i+1} = c_i \quad i = 1, ..., N-1 \qquad (11)$$

$$\lambda_N^* m_{N-1} + 2m_N = c_N^*,$$

причем

$$c_i = 3\left(\mu_i \frac{z_{i+1} - z_i}{h} + \lambda_i \frac{z_i - z_{i-1}}{h}\right),$$

$$\mu_i = \lambda_i = 0,5.$$

Здесь для граничных условий шарнирного опирания

$$\mu_0^* = \lambda_N^* = 1, \quad c_0^* = 3\frac{z_1}{h}, \quad c_N^* = -3\frac{z_{N-1}}{h}.$$

Окончательно получаем, если интерполируется функция $u(\varphi)$ и выполнены граничные условия шарнирного опирания, то интерполяционный сплайн $S(z, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{l} z_0 = 0,\ z_{n+1} = 0, \\ m_0 = \frac{3}{h} z_1 - \frac{1}{2} m_1,\ m_{n+1} = \frac{3}{h} z_n - \frac{1}{2} m_n. \end{array} \qquad (12)$$

Аналогично, если интерполируется функция $v(\varphi)$ и выполнены условия жесткой заделки, то сплайн удовлетворяет

$$\begin{array}{l} z_0 = 0,\ z_{n+1} = 0, \\ m_0 = 0,\ m_{n+1} = 0. \end{array} \qquad (13)$$

Определим вектор $m = (m_1, m_2, ..., m_n)^t$. Тогда m может быть вычислен по формуле:

$$m = C^{-1} M u,$$

где матрицы C и M имеют вид:

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & b & a \end{pmatrix},$$

$$M = \frac{3}{2h}\begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -d & c \end{pmatrix},$$

где $a = 4,\ b = 1, c = 0,\ d = -1$, если сплайн $S(z, \varphi)$ удовлетворяет на концах интервала $[0, \alpha]$ условиям (13), и при $a = 3.5,\ b = 1, c = -0.5,\ d = 1$, если выполняются условия (12).

Для того, чтобы учесть условие несжимаемости, введем штрафную функцию:

$$F = \frac{D}{2}\int_0^\alpha \Big(u - w'\Big)^2 d\varphi,$$

где D — достаточно большое число, которое определяется опытным путем в численных экспериментах.

С учетом штрафной функции задачу об устойчивости арки можно сформулировать следующим образом: требуется найти минимальное значение нагрузки P, при которой вариационная задача

$$U = \int_{-\tau}^{\tau}\Big(\frac{B}{2R^3}(u'' + u)^2 + \frac{A}{2R^2}(\gamma - \frac{1}{R}v^{''})^2 +$$

$$+ \frac{C}{2R^2}(\gamma^{'} + \frac{1}{R}v^{''})^2\Big)d\varphi -$$

$$- \frac{P}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\Big(u^{'2} - 2u^2 + v^{'2} - v^2\Big)d\varphi +$$

$$+ \frac{D}{2}\int_{-\tau}^{\tau}\Big(u - w'\Big)^2 d\varphi \to \min_{u,v,w}$$

при выполнении ограничений (5) имеет нетривиальное решение.

Рассмотрим вариационную задачу:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^\alpha\Big(\frac{1}{2}(u'' + u)^2 + \frac{AR}{B}(\gamma - \frac{1}{R}v^{''})^2 +$$

$$+ \frac{CR}{B}(\gamma^{'} + \frac{1}{R}v^{''})^2 +$$

$$+ \frac{R^3 D}{2B}\big(u - w'\big)^2\Big)d\varphi \to \min_{u,v,w\in\Gamma_1} \qquad (14)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_0^\alpha\Big(u^{'2} - ku^2\Big)d\varphi = 1 \qquad (15)$$

при граничных условиях (12) или (13) и выполнении неравенств (9).

Пусть u_*, v_*, w_* — решение задачи (14), (15), (9) и $\lambda_* = J_1(u_*, v_*, w_*)$. Тогда для любого $\lambda \le \lambda_*$ $J_1(u, v, w) - \lambda J_2(u, v, w) \ge 0$ для всех $(u, v, w) \in \Gamma_1$ и, наоборот, если $\lambda > \lambda_*$, то найдутся функции $(u, v, w) \in \Gamma_1$ такие, что $J_1(u, v, w) - \lambda J_2(u, v, w) < 0$, т. е. $P^* = \frac{B}{R^3}\lambda*$ имеет смысл критической нагрузки: при $P \le P^*$ задача (9),(14) имеет только тривиальное решение, при $P > P^*$ выполняется неравенство $\widetilde{J}((u^*, v^*, w^*)) < 0$.

После подстановки сплайнов $S(v, \varphi)$ и $\widetilde{S}(\widetilde{v}, \varphi)$ в (14), (15) получаем две квадратичные формы:

$$g = \frac{1}{2}\int_0^\alpha\Big(\frac{d^2S}{d\varphi^2} + S\Big)^2 d\varphi + \frac{D}{2}\int_0^\alpha\Big(S - \widetilde{S}'\Big)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}(Gz, z),$$

$$q = \frac{1}{2}\int_0^\alpha\Big(S'^2 - kS^2\Big)d\varphi = \frac{1}{2}(Qz, z).$$

Для вычисления коэффициентов квадратичных форм необходимо вычислить следующие интегралы:

1. Интеграл от квадрата сплайна

$$\int_0^\alpha S^2(t)dt = h\sum_{i=0}^{n}\Big(\frac{11}{105}z_i m_i h - \frac{13}{210}z_i m_{i+1} h +$$

$$+\frac{13}{210}m_i h z_{i+1} - \frac{1}{70}m_i h^2 m_{i+1} - \frac{11}{105}z_{i+1}m_{i+1}h+$$

$$+\frac{13}{35}z_i^2 + \frac{1}{105}m_i^2 h^2 + \frac{9}{35}z_i z_{i+1}+$$

$$\left.+\frac{13}{35}z_{i+1}^2 + \frac{1}{105}m_{i+1}^2 h^2\right).$$

2. Интеграл от квадрата первой производной

$$\int_0^\alpha S'^2(t)dt = \frac{1}{5h}\sum_{i=0}^{n}\left(z_i m_i h + z_i m_{i+1}h - m_i h z_{i+1} -\right.$$

$$-\frac{1}{3}m_i h^2 m_{i+1} - z_{i+1}m_{i+1}h + 6z_i^2 +$$

$$\left.+\frac{2}{3}m_i^2 h^2 - 12 z_i z_{i+1} + 6\cdot z_{i+1}^2 + \frac{2}{3}m_{i+1}^2 h^2\right).$$

3. Интеграл от квадрата второй производной

$$\int_0^\alpha S''^2(t)dt = \frac{1}{h^3}\sum_{i=0}^{n}\left(12z_i^2 + 12 z_i m_{i+1}h -\right.$$

$$-24 z_i z_{i+1} + 12 z_i m_i h - 12 z_{i+1}m_{i+1}h+$$

$$+4m_i h^2 m_{i+1} + 4m_{i+1}^2 h^2 + 12 z_{i+1}^2 -$$

$$\left.-12 m_i h z_{i+1} + 4m_i^2 h^2\right).$$

4. Интеграл от произведения второй производной и сплайна

$$\int_0^\alpha S''(t)\cdot\widetilde{S}(t)dt = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{n}\left(z_{n+i+1}m_i h - \widetilde{m}_i h z_{i+1} -\right.$$

$$-z_{i+n}m_i h + \widetilde{m}_i h z_i - \widetilde{m}_{i+1}h z_i - z_{n+i+1}m_{i+1}h+$$

$$+z_{i+n}m_{i+1}h + \frac{1}{6}\widetilde{m}_i h^2 m_{i+1} + \widetilde{m}_{i+1}h z_{i+1} -$$

$$-\frac{1}{6}\widetilde{m}_{i+1}h^2 m_i + 5z_{n+i+1}z_i + 5z_{n+i+1}z_{i+1} -$$

$$\left.-5z_{n+i}z_i - 5z_{n+i}z_{i+1}\right).$$

Здесь числа $z_0,\ z_{n+1},\ m_0,\ m_{n+1}$ (в зависимости от граничных условий) определяются формулами (13) или (12). Для сплайна $\widetilde{S}(\widetilde{z},\varphi)$ $\widetilde{z}_0 = 0,\ \widetilde{z}_{n+1} = 0,\ \widetilde{m}_0 = 0,\ \widetilde{m}_{n+1} = 0.$

Приходим к конечномерной задаче оптимизации:

$$g(z) = \frac{1}{2}(Gz, z) \to \min_{z\in R^{2n}} \qquad (16)$$

$$q(z) = \frac{1}{2}(Qz, z) = 1, \qquad (17)$$

$$(a_j, z) \le 0,\ j = 1,\ldots,M. \qquad (18)$$

В (18) векторы $a_j \in R^{2n}$ получаются в результате подстановки сплайнов $S(z,\varphi)$ и $\widetilde{S}(\widetilde{z},\varphi)$ в (9). Квадратичные формы $g(z)$ и $q(z)$ положительно определены, если $\alpha < \pi$.

Обозначим через Γ конус, определяемый неравенствами (18). Пусть z_* — решение задачи (16)–(18). Тогда по теореме Куна-Таккера найдутся множители Лагранжа λ_* и τ_j, $\tau_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,M$, такие, что

$$\begin{cases} Gz_* - \lambda_* Q z_* + \sum_{j=1}^{M}\tau_j a_j = 0,\\ \tau_j(a_j, z) = 0,\ j = 1,\ldots,M.\end{cases} \qquad (19)$$

У системы уравнений (19) есть необходимые условия экстремума, но, так как задача (16)–(18) не является задачей выпуклого программирования, то эти условия не достаточны. Точки z_*, удовлетворяющие (19), будем называть стационарными.

Для решения задачи (19) необходимо применять методы глобальной оптимизации (например, метод ветвей и границ [3]), число переменных может быть велико, а в данном случае трудоемкость метода ветвей и границ определяется размерностью задачи. Для решения задачи (16)–(18) применялся метод поиска стационарных точек [6, 7].

Поскольку метод ветвей и границ является довольно трудоемким, в данном случае можно предложить метод перебора вариантов, который в сочетании с локальным алгоритмом может оказаться более предпочтительным.

2. Результаты и их обсуждение

При $M = 3, \tau = \frac{\pi}{2}$ арка представляет собой половину дуги окружности. При расчетах использовались граничные условия жесткой заделки:

$$u = 0,\ \ w = 0,\ \ u' + w = 0,\ \ v = 0,\ \ v' = 0,\ \ \gamma = 0$$

при $\varphi = \pm\tau$; и шарнирного опирания:

$$u = 0,\ \ w = 0,\ \ u'' + w' = 0,\ \ v = 0,\ \ v'' + \gamma' = 0,$$

при $\varphi = \pm\tau$.

Круговая форма равновесия арки устойчива, если давление P не превосходит некоторого предельного значения P_{kp}. Предположим, что сечение арки — круг, т. е. полуоси $a = b = 1$. Без ограничений (9) решение задачи (5) дает критическую силу $P_{kp} = 5.2892$. Если же рассматривать задачу (5)–(9), то $P_{kp} = 5.3570$. В данном случае получается, что $u \equiv 0$ и $w \equiv 0$, а $v = 0$ в точках прикрепления тросов. В табл. 1, 2 приведены результаты вычислений при разных граничных условиях и значений полуосей эллипса, в последнем столбце — значения при выполнении неравенства

$$-Ru_i \pm 2v_i z_0 \le 0,$$

характеризующего одновременно плоскую и пространственную деформации.

Таблица 1

Результаты вычислений при граничных условиях жесткой заделки

Table 1

Calculation results for rigid embedment boundary conditions

	без огр.	$v_i = 0$	удовл. (9)
a=0.5, b=1	0.0570	0.3764	0.0755
a=0.75, b=1	1.3758	4.9026	1.4793
a=1.0, b=1	5.2892	11.4203	5.3570
a=2.0, b=1	22.7900	22.7900	24.1390

Таблица 2

Результаты вычислений при граничных условиях шарнирного опирания

Table 2

Calculation results for hinged support boundary conditions

	без огр.	$v_i = 0$	удовл. (9)
a=0.5, b=1	0	0.1492	0.0384
a=0.75, b=1	0	2.7697	0.8352
a=1.0, b=1	0	8.5631	2.4033
a=2.0, b=1	0	23.2861	13.2698

Результаты вычислений показали, что одновременный учет плоской и пространственной деформации приводит к снижению критической нагрузки.

Заключение

Учитывая проведенный численный анализ, можно сделать вывод, что устойчивость арки, подкрепленной откосами (тросами), расстояние между концами которых не может изменяться, существенно увеличивает значение критической нагрузки. При этом для правильной оценки критической силы необходимо учитывать как пространственную, так и плоскую деформацию ($u \neq 0$ и $v \neq 0$), в отличие от случая без подкрепления. Тогда при потере устойчивости происходит либо деформация арки в ее первоначальной плоскости ($v = 0$ и $\gamma = 0$), либо пространственная деформация ($u = 0$ и $w = 0$). Величина критической силы существенно зависит от констант жесткости A и B, от радиуса R и граничных условий.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Николаи, Е. Л. Труды по механике / Е. Л. Николаи. – Москва : Изд-во технико-теоретической литературы, 1955. – 583 с.
2. Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – Москва : Наука, 1980. – 352 с.
3. Сухарев, А. Г. Глобальный экстремум и методы его отыскания // Математические методы и исследования операций. – Москва : Изд-во МГУ, 1981. – С. 4–37.
4. Алфутов, Н. А. Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии / Н. А. Алфутов, А. Н. Еремичев // Расчеты на прочность. – Москва : Машиностроение, 1989. – С. 179–180.
5. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – Москва : Наука, 1967. – 376 с.
6. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
7. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Int. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg: Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

References

1. Nikolai, E. L. Trudy po mekhanike [Writings on Mechanics] / E. L. Nikolai. – Moskva : Izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. – 584 p.
2. Zav’yalov, Yu. S. Metody splayn-funktsiy [Methods of spline functions] / Yu. S. Zav’yalov, B. I. Kvasov, V. L. Miroshnichenko. – Moskva : Nauka, 1980. – 352 ps.
3. Sukharev, A. G. Global’nyy ekstremum i metody yego otyskaniya [Global extremum and methods for finding it] // A. G. Sukharev. – Mathematical Methods and Operations Research. – Moscow : Publishing House of Moscow State University, 1983. – P. 4–37.
4. Alfutov, N. A. Vliyaniye odnostoronnikh svyazey na ustoychivost’ tsilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii [Influence of unilateral bonds on the stability of cylindrical shells under axial compression] // N. A. Alfutov, A. N. Eremichev. – Strength Calculations. – Moscow : Engineering, 1989. – P. 179–180.
5. Feodosiev, V.I. Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov [Selected problems and questions on the strength of materials] / V.I. Feodosiev. – Moscow : Nauka, 1967. – 376 p.
6. Andryukova, V. Nonsmooth problem of stability for elastic rings / V. Andryukova, V. Tarasov // Abstracts of the Int. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 213–218.
7. Tarasov, V. Nonsmooth problems in the mechanics of elastic systems // Abstracts of the Int. Conf. “Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics” dedicated to the Memory of Professor V.F. Demyanov. Part I. – Saint-Petersburg : Institute of Electrical and Electronic Engineers, 2017. – P. 252–256.

Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

Acknowledgement (state task)
The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

Для цитирования:
Андрюкова, В. Ю. Об устойчивости круговых подкрепленных арок в случае пространственной деформации / В. Ю. Андрюкова, В. Н. Тарасов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 22–27.

For citation:
Andryukova, V. Yu. On the stability of circular reinforced arches in the case of spatial deformation / V. Yu. Andryukova, V. N. Tarasov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2024. – № 5 (71). – P. 22–27.

Дата поступления статьи: 18.06.2024
Received: 18.06.2024