

Контракции калибровочных групп и спонтанное нарушение симметрии

Н. А. Громов, В. В. Куратов

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,
г. Сыктывкар

gromov@ipm.komisc.ru

kuratov@ipm.komisc.ru

Аннотация

Изучены контракции калибровочных моделей с ортогональными группами Кэли-Клейна $SO(2; \epsilon)$, $SO(3; \epsilon)$ и унитарными группами $SU(2; \epsilon)$ в качестве калибровочных групп. В пределе нулевых контрационных параметров ортогональные группы изоморфны неполупростым группам Евклида и Ньютона соответствующей размерности, а пространства полей материи становятся расслоенными пространствами с вырожденной метрикой. Особое внимание уделено согласованию спонтанного нарушения симметрии с процедурой контракции групп. Показано, что контрактированные калибровочные теории описывают тот же набор полей с теми же массами, что и теории с исходными простыми группами, если выбранный вакуум в соответствующем пределе принадлежал базе расслоенного пространства полей материи. Получены зависящие от контрационных параметров лагранжианы моделей, что позволяет проследить порядок обнуления слагаемых в лагранжианах при стремлении параметров контракции к нулю.

Ключевые слова:

ортогональные группы Кэли-Клейна, унитарная группа Кэли-Клейна, контракция калибровочной группы, спонтанное нарушение симметрии

Введение

Калибровочные теории были предложены Янгом и Миллсом в 1954 г. [1] и в настоящее время рассматриваются как наиболее успешный метод описания фундаментальных взаимодействий в физике частиц, где в основном используются компактные полупростые группы. Например, единое описание электромагнитных и слабых взаимодействий в рамках стандартной модели Вайнберга-Салама [2, 3] основано на калибровочной группе $SU(2) \times U(1)$.

Наппи и Виттенном было замечено [4], что можно рассматривать калибровочные теории и для неполупростых групп, обладающих невырожденной инвариантной билинейной формой. Такие теории имеют более простую структуру по сравнению со стандартными моделями с полупростыми калибровочными группами. Позже появились работы [5, 6], в которых рассматривались калибровочные те-

Contractions of gauge groups and spontaneous symmetry breaking

N. A. Gromov, V. V. Kuratov

Institute of Physics and Mathematics,
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,
Syktyvkar

gromov@ipm.komisc.ru

kuratov@ipm.komisc.ru

Abstract

Contractions of gauge models with orthogonal Cayley-Klein groups $SO(2; \epsilon)$, $SO(3; \epsilon)$, unitary groups $SU(2; \epsilon)$ as gauge groups are studied. In the limit of zero contraction parameters, orthogonal groups are isomorphic to the non-semisimple Euclidean and Newton groups of the corresponding dimension, and the spaces of matter fields become fibered spaces with a degenerate metric. Particular attention is paid to the coordination of spontaneous symmetry breaking with the group contraction procedure. It is shown that contracted gauge theories describe the same set of fields with the same masses as theories with the original simple groups, if the chosen vacuum in the corresponding limit belonged to the base of the fibered space of matter fields. Lagrangians of the models depending on the contraction parameters are obtained, which makes it possible to trace the order of zeroing of terms in the Lagrangians as the contraction parameters tend to zero.

Keywords:

orthogonal Cayley-Klein groups, unitary Cayley-Klein group, contraction of the gauge group, spontaneous symmetry breaking

риями, отвечающие различным неполупростым группам. Контракции стандартной электрослабой модели Вайнберга-Салама к калибровочной группе $SU(2; \epsilon) \times U(1)$ описаны в [7].

В данной работе рассматривается механизм спонтанного нарушения симметрии (механизм Хиггса) для калибровочных моделей, основанных на неполупростых группах. Такие группы в фундаментальном представлении являются группами преобразований расслоенных пространств с вырожденной метрикой и могут быть получены из классических простых групп контракциями (предельными переходами). Последовательность обнуления слагаемых лагранжиана в процессе предельного перехода задается явной зависимостью лагранжиана от параметра контракции.

1. Калибровочная теория для группы $SO(2; \epsilon)$.

1.1. Единое описание модели. Рассмотрим преобразование $SO(2)$ калибровочной модели в галилееву калибровочную теорию с помощью контракции группы вращений в группу Галилея. Пространство $\Phi_2(\epsilon)$ и группа $G_2 = SO(2; \epsilon)$ Галилея могут быть получены из евклидовой плоскости Φ_2 и группы $SO(2)$ введением параметра контракции ϵ и заменами $\phi_2 \rightarrow \epsilon\phi_2$, $\alpha \rightarrow \epsilon\alpha$, при $\epsilon \rightarrow 0$. Калибровочные преобразования

$$\begin{pmatrix} \phi'_1(x) \\ \epsilon\phi'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \epsilon\alpha(x) & \sin \epsilon\alpha(x) \\ -\sin \epsilon\alpha(x) & \cos \epsilon\alpha(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \epsilon\phi_2(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

оставляют инвариантной форму $\phi^t(\epsilon)\phi(\epsilon) = \phi_1^2 + \epsilon^2\phi_2^2$, которая при $\epsilon = 1$ определяет евклидову метрику в пространстве Φ_2 .

Чтобы проследить поведение слагаемых при переходе к пределу, введем параметр ϵ в стандартный лагранжиан [8]

$$L(\epsilon) = -\epsilon^2 \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} [(D_\mu \phi_1)^2 + \epsilon^2 (D_\mu \phi_2)^2] - \frac{\lambda}{4} [(\phi_1^2 + \epsilon^2 \phi_2^2)^2 - v^2]^2, \quad (2)$$

где ковариантные производные даны соотношением

$$D_\mu \phi(\epsilon) = \partial_\mu \phi(\epsilon) + \epsilon e A_\mu T \phi(\epsilon),$$

$$\begin{pmatrix} D_\mu \phi'_1 \\ \epsilon D_\mu \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\mu & \epsilon e A_\mu \\ -\epsilon e A_\mu & \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \epsilon\phi_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

т. е.

$$\begin{aligned} D_\mu \phi_1 &= \partial_\mu \phi_1 + \epsilon^2 e A_\mu \phi_2, \\ D_\mu \phi_2 &= \partial_\mu \phi_2 - e A_\mu \phi_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Механизм спонтанного нарушения симметрии (механизм Хиггса [9]) – это способ наделить массой калибровочные поля. Лагранжиан (2) имеет набор основных состояний, которые достигаются при нулевых векторных полях $A_\mu = 0$ и ковариантно постоянных полях материи $D_\mu \phi = 0$, обеспечивающих минимум потенциала $V(\phi(\epsilon)) = [\phi_1^2 + \epsilon^2 \phi_2^2 - v^2]^2$, т. е.

$$\phi_1^2 + \epsilon^2 \phi_2^2 = v^2, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (5)$$

Все основные состояния (рис. 1) (при $\epsilon \neq 0$) можно получить с помощью калибровочных преобразований из одного из них, например,

$$\phi^{\text{vac}} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (6)$$

отвечающего точке $A(v, 0)$ на рис. 1.

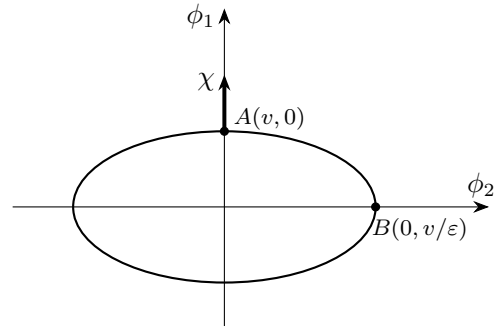


Рисунок 1. Эллипс вакуумов лагранжиана $L(\epsilon)$.
Figure 1. Ellipse of vacua of the Lagrangian $L(\epsilon)$.

Рассмотрим малые возбуждения $\chi(x)$ компоненты поля $\phi_1(x)$ относительно выбранного вакуума $\phi_1(x) = v + \chi(x)$ (рис. 1). За счет калибровочных преобразований (1) компонента $\phi_2(x)$ становится отличной от нуля. Подстановка поля материи $\phi = \begin{pmatrix} v + \chi \\ \epsilon\phi_2 \end{pmatrix}$ приводит лагранжиан к виду

$$L(\epsilon) = L_b + \epsilon^2 L_s,$$

$$\begin{aligned} L_b &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \sqrt{\lambda} \mu \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4, \\ L_s &= -\frac{1}{4} B_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2 v^2}{2} B_\mu^2 + e A_\mu (\phi_2 \partial_\mu \chi - \chi \partial_\mu \phi_2) + \\ &+ v \chi (e^2 A_\mu^2 - \lambda \phi_2^2) + \frac{1}{2} \chi^2 (e^2 A_\mu^2 - \frac{\lambda}{2} \phi_2^2), \end{aligned} \quad (7)$$

где $B_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \phi_2$ – калибровочное векторное поле с массой $m_B = ev = \frac{e\mu}{\sqrt{\lambda}}$, χ – скалярное поле (хиггсовский бозон) с массой $m_\chi = \mu^2$, а также включены слагаемые, описывающие взаимодействия полей. При малых ϵ поле ϕ_2 за счет калибровочных преобразований связано с вакуумом соотношением $\phi_2(x) = \alpha(x)(v + \chi(x))$. Вводя векторное поле $\hat{B}_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \alpha$, преобразуем лагранжиан L_s к виду, содержащему только поле \hat{B}_μ и его взаимодействия с полем χ

$$L_s = -\frac{1}{4} \hat{B}_{\mu\nu}^2 + \frac{e^2 v^2}{2} \hat{B}_\mu^2 + v e^2 \chi \hat{B}_\mu^2 + \frac{e^2}{2} \chi^2 \hat{B}_\mu^2. \quad (8)$$

Теория с калибровочной группой $SO(2; \epsilon)$ может быть получена из теории с группой $SO(2)$ подстановкой

$$\begin{aligned} v &\rightarrow v, \quad \phi_1 \rightarrow \phi_1, \quad \phi_2 \rightarrow \epsilon\phi_2, \\ A_\mu &\rightarrow \epsilon A_\mu, \quad F_{\mu\nu} \rightarrow \epsilon F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (9)$$

1.2. Калибровочная модель для группы Галилея G_2 .

Теория с калибровочной группой Галилея G_2 получается из теории с группой $SO(2)$ переходом к пределу $\epsilon \rightarrow 0$. В этом пределе пространство полей материи Φ_2 превращается в двумерное тривиально расслоенное пространство $\Phi_2(\epsilon)$, в котором ось $\{\phi_1\}$ есть одномерная база, а ось $\{\phi_2\}$ представляет одномерный слой. Инвариант $\phi^t(\epsilon)\phi(\epsilon) = \phi_1^2 + \epsilon^2 \phi_2^2$ распадается на два инварианта: $\text{inv}_1 = \phi_1^2$ относительно общих преобразований (1) $\phi'_1 = \phi_1$, $\phi'_2 = \phi_2 - \alpha\phi_1$ и $\text{inv}_2 = \phi_2^2$ относительно только дискретных преобразований $\phi'_2 = \pm\phi_2$ в слое

($\phi_1 = 0$). Поэтому в пространстве Галилея есть две метрики: одна в базе, а другая в слое. Учтем в дальнейшем эту особенность.

Пучок прямых, проведенных через точку, на этих двух плоскостях имеет разные свойства относительно автоморфизмов плоскости [10]. На евклидовой плоскости любые две прямые пучка совмещаются друг с другом вращениями вокруг точки (рис. 2). На плоскости Галилея (рис. 3) в пучке есть одна изолированная прямая, которая не совмещается с любой другой прямой пучка вращениями вокруг точки, т. е. преобразованиями Галилея.

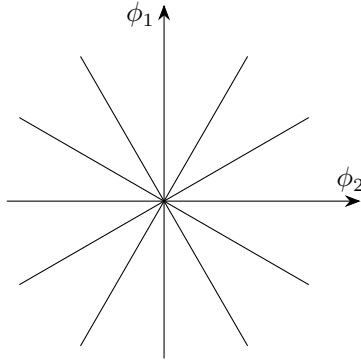


Рисунок 2. Пучок прямых на плоскости Евклида E_2 .
Figure 2. Bundle of lines on the Euclidean plane E_2 .

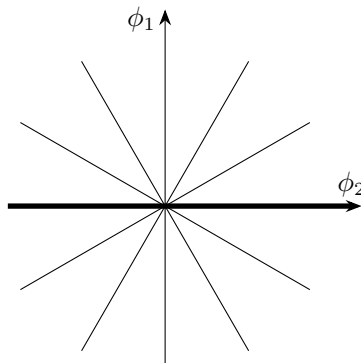


Рисунок 3. Пучок прямых на плоскости Галилея G_2 .
Figure 3. Bundle of lines on the Galilean plane G_2 .

Если интерпретировать эти плоскости в некотором физическом контексте, тогда на евклидовой плоскости все прямые должны иметь одну и ту же физическую размерность $[\phi_1] = [\phi_2]$. На плоскости Галилея имеется бесконечно много прямых с той же физической размерностью, что и размерность базы $[\phi_1]$ и одна изолированная прямая, имеющая некоторую другую размерность $[\phi_2] \neq [\phi_1]$ [11]. Например, при интерпретации пространства Галилея как пространства-времени классической физики база рассматривается как ось времени и имеет размерность [сек], а слой моделирует собственно пространство и имеет размерность [см].

Представления (7), (8) указывают порядок стремления к нулю слагаемых в лагранжиане при переходе к пределу $\epsilon \rightarrow 0$. Вначале считаем малым лагранжиан L_s , пропорциональный ϵ^2 , затем в остатке получаем поле χ в базе (рис. 4) с лагранжианом $L_b = L_\chi$. Можно рассматривать и обратный процесс восстановления полей и взаимодействий при изменении параметра контракции ϵ от нуля до единицы.

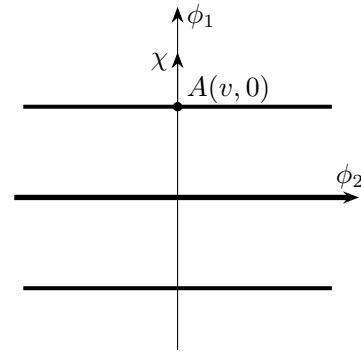


Рисунок 4. Основные состояния модели с калибровочной группой Галилея G_2 .
Figure 4. Ground states of the model with the Galileo gauge group G_2 .

Другой выбор основного состояния отвечает точке $B(0, \frac{v}{\epsilon})$ на рис. 1. В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ она попадает в слой $\phi_1 = 0, \phi_2$ и описывается вектором $\phi_{vac} = (0, \epsilon \frac{v}{\epsilon})^t = (0, v)^t$. Лагранжиан (2) в слое инвариантен только относительно дискретной калибровочной симметрии $\phi_2 \rightarrow -\phi_2$. Малые возмущения ξ поля ϕ_2 в окрестности этого вакуума описываются полем материи вида (рис. 5)

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ v + \epsilon \xi(x) \end{pmatrix}, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (10)$$

Подставив его в общий лагранжиан (2), получим лагранжиан в слое

$$L(\epsilon) = \epsilon^2 L_f = \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)^2 - \mu^2 \xi^2 - \epsilon \sqrt{\lambda} \mu \xi^3 - \epsilon^2 \frac{\lambda}{4} \xi^4 \right]. \quad (11)$$

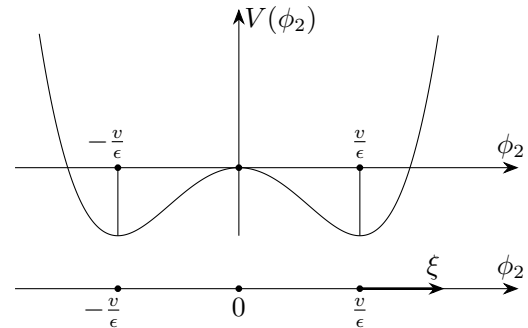


Рисунок 5. Потенциал $V(\phi_2)$ и основные состояния лагранжиана в слое ($\phi_1 = 0, \phi_2$).
Figure 5. Potential $V(\phi_2)$ and ground states of the Lagrangian in fiber ($\phi_1 = 0, \phi_2$).

Лагранжианы в базе L_χ (7) и слое L_f (11) имеют одинаковый вид, совпадающий с формулой (5.8) в монографии [8] для лагранжиана возмущений скалярного поля φ с дискретной симметрией $\varphi \rightarrow -\varphi$. Лагранжиан L_χ (7) не инвариантен относительно замены $\chi \rightarrow -\chi$, так же как L_f (11) не инвариантен относительно замены $\xi \rightarrow -\xi$, поскольку основные состояния не инвариантны. След симметрии $\varphi \rightarrow -\varphi$ в лагранжианах L_χ, L_f остался в виде соотношения между массой поля μ^2 и константами кубического и четверного взаимодействий. Таким образом, в калибровочной теории с группой Галилея G_2 поле материи (хиггсовский бозон) χ в базе и калибровочное поле B_μ в слое представляют физически разные поля с разными

физическими размерностями, подобно тому, как время (база) и пространство (слой) в пространстве-времени Галилея являются разными физическими сущностями. Тем не менее размерности масс хиггсовского бозона $m_\chi = \sqrt{2}\mu$ и векторного бозона $m_B = ev = \frac{e\mu}{\sqrt{\lambda}}$ одинаковы и в точности таковы же, как и в неконтрактированной $SO(2)$ калибровочной теории.

В калибровочной теории с группой $SO(2; \epsilon)$ при $\epsilon \neq 0$ в качестве вакуума можно выбрать любое основное состояние на эллипсе рис. 1. Однако для того, чтобы получить теорию с полной, зависящей от одного вещественного параметра группой Галилея G_2 при переходе к пределу $\epsilon \rightarrow 0$, необходимо, чтобы выбранный вакуум принадлежал базе в этом пределе (см. рис. 4). Если же вакуум модели отвечает, например, точке B на рис. 1, то в пределе получаем модель с дискретной симметрией, являющейся дискретной подгруппой исходной калибровочной группы.

2. Калибровочные теории с группами $SO(3; \epsilon)$

2.1. Единая калибровочная модель. Ортогональная группа Кэли-Клейна $SO(3; \epsilon)$, $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ определяется [11] как группа преобразований вещественного пространства $\Phi_3(\epsilon)$, оставляющая инвариантной квадратичную форму

$$\phi^t(\epsilon)\phi(\epsilon) = \phi_1^2 + \epsilon_1^2\phi_2^2 + \epsilon_1^2\epsilon_2^2\phi_3^2. \quad (12)$$

Калибровочные преобразования полей материи $\phi(\epsilon)$ осуществляются элементами $\omega(x; \epsilon) \in SO(3; \epsilon)$ в виде

$$\phi'(x) = \omega(x; \epsilon)\phi(x),$$

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \epsilon_1\phi'_2 \\ \epsilon_1\epsilon_2\phi'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \epsilon_1\omega_{12} & \epsilon_1\epsilon_2\omega_{13} \\ \epsilon_1\omega_{21} & \omega_{22} & \epsilon_2\omega_{23} \\ \epsilon_1\epsilon_2\omega_{31} & \epsilon_2\omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \epsilon_1\phi_2 \\ \epsilon_1\epsilon_2\phi_3 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Здесь контрационные параметры независимо стремятся к нулю $\epsilon_k \rightarrow 0$, $k = 1, 2$. Генераторы алгебры Ли $so(3; \epsilon)$ имеют вид

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_1 & 0 \\ \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\epsilon_1\epsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_1\epsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_2 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[T_1, T_2] = \epsilon_1^2 T_3, \quad [T_2, T_3] = \epsilon_2^2 T_1, \quad [T_3, T_1] = T_2. \quad (15)$$

Калибровочные поля принимают значения в алгебре $so(3; \epsilon)$

$$A_\mu(x) = gT^a A_\mu^a(x) = g \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon_1 A_\mu^1 & -\epsilon_1\epsilon_2 A_\mu^2 \\ \epsilon_1 A_\mu^1 & 0 & -\epsilon_2 A_\mu^3 \\ \epsilon_1\epsilon_2 A_\mu^2 & \epsilon_2 A_\mu^3 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Тензор напряженности

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] = gT^a F_{\mu\nu}^a(x) \quad (17)$$

в компонентах имеет вид

$$F_{\mu\nu}^1 = \partial_\mu A_\nu^1 - \partial_\nu A_\mu^1 + \epsilon_2^2 g(A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2),$$

$$F_{\mu\nu}^2 = \partial_\mu A_\nu^2 - \partial_\nu A_\mu^2 + g(A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3),$$

$$F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + \epsilon_1^2 g(A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1). \quad (18)$$

Ковариантная производная задается соотношением $D_\mu \phi(\epsilon) = [\partial_\mu + gT(A_\mu)]\phi(\epsilon)$ или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} D_\mu \phi_1 \\ \epsilon_1 D_\mu \phi_2 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 D_\mu \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\mu & -\epsilon_1 g A_\mu^1 & -\epsilon_1 \epsilon_2 g A_\mu^2 \\ \epsilon_1 g A_\mu^1 & \partial_\mu & -\epsilon_2 g A_\mu^3 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 g A_\mu^2 & \epsilon_2 g A_\mu^3 & \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \epsilon_1 \phi_2 \\ \epsilon_1 \epsilon_2 \phi_3 \end{pmatrix} \quad (19)$$

и действует на компоненты поля $\phi(\epsilon)$ по формулам

$$D_\mu \phi_1 = \partial_\mu \phi_1 - g\epsilon_1^2 (A_\mu^1 \phi_2 + \epsilon_2^2 A_\mu^2 \phi_3),$$

$$D_\mu \phi_2 = \partial_\mu \phi_2 + g(A_\mu^1 \phi_1 - \epsilon_2^2 A_\mu^3 \phi_3),$$

$$D_\mu \phi_3 = \partial_\mu \phi_3 + g(A_\mu^2 \phi_1 + A_\mu^3 \phi_2). \quad (20)$$

Полный лагранжиан модели $\mathcal{L}(\epsilon) = L_A(\epsilon) + L_\phi(\epsilon)$ определяется как сумма лагранжиана калибровочных полей

$$L_A(\epsilon) = \frac{1}{8g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}(\epsilon))^2 = -\frac{1}{4} [\epsilon_1^2 (F_{\mu\nu}^1)^2 + \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 (F_{\mu\nu}^2)^2 + \epsilon_2^2 (F_{\mu\nu}^3)^2] \quad (21)$$

и лагранжиана полей материи

$$L_\phi(\epsilon) = \frac{1}{2} (D_\mu \phi(\epsilon))^t (D_\mu \phi(\epsilon)) - V(\phi; \epsilon), \quad (22)$$

где потенциал выбирается в виде

$$V(\phi; \epsilon) = \frac{\lambda}{4} \left(\phi^t(\epsilon)\phi(\epsilon) - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2. \quad (23)$$

В явном виде с учетом (18) калибровочный лагранжиан запишется

$$L_A(\epsilon) = -[\epsilon_1^2 (\mathcal{F}_{\mu\nu}^1)^2 + \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 (\mathcal{F}_{\mu\nu}^2)^2 + \epsilon_2^2 (\mathcal{F}_{\mu\nu}^3)^2] - \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 [L_A^{(3)}(\epsilon) + L_A^{(4)}(\epsilon)]. \quad (24)$$

Слагаемые третьего и четвертого порядков по полям равны

$$L_A^{(3)}(\epsilon) = 2g [\mathcal{F}_{\mu\nu}^1 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) + \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3) + \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)],$$

$$L_A^{(4)}(\epsilon) = g^2 [\epsilon_2^2 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2)^2 + (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3)^2 + \epsilon_1^2 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2], \quad (25)$$

а $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$ есть тензор напряженности в плоском пространстве.

Основные состояния лагранжиана $L(\epsilon) = L_A(\epsilon) + L_\phi(\epsilon)$ представляют собой конфигурацию полей, обнуляющих калибровочный лагранжиан $L_A(\epsilon) = 0$ и доставляющих минимум потенциалу (23). Основные состояния реализуются на полях

$$A_\mu(x; \epsilon) = \omega(x; \epsilon) \partial_\mu \omega^{-1}(x; \epsilon), \quad \omega(x; \epsilon) \in SO(3; \epsilon),$$

$$\phi^t(\epsilon) \phi(\epsilon) = \phi_1^2 + \epsilon_1^2 \phi_2^2 + \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \phi_3^2 = v^2, \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}, \quad (26)$$

которые при $A_\mu(x; \epsilon) = 0$ лежат на эллипсоиде («сфере» радиуса v) (рис. 6) в пространстве полей материи, задаваемом уравнением (26), и могут быть получены калибровочными преобразованиями

$$\phi(x; \epsilon) = \omega(x; \epsilon) \phi^{vac},$$

$$A'_\mu(x; \epsilon) = \omega(x; \epsilon) A_\mu(x; \epsilon) \omega^{-1}(x; \epsilon) + \omega(x; \epsilon) \partial_\mu \omega^{-1}(x; \epsilon) \quad (27)$$

из одного основного состояния, выбираемого из соображений простоты в виде

$$A_\mu(x; \epsilon) = 0, \quad (\phi^{vac})^t = (v, 0, 0)^t \quad (28)$$

(точка A на рис. 6).

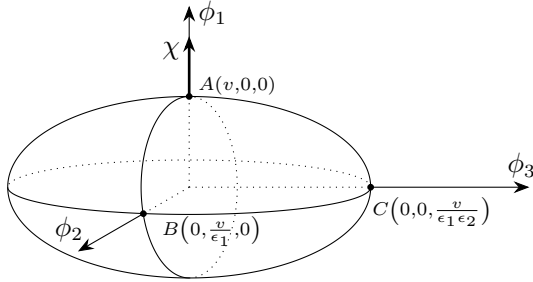


Рисунок 6. Эллипсоид основных состояний лагранжиана $L(\epsilon)$.
Figure 6. The ellipsoid of the ground states of the Lagrangian $L(\epsilon)$.

Далее в механизме Хиггса рассматриваются малые (линейные) возбуждения поля ϕ_1 в окрестности вакуума

$$\phi_1(x) = v + \chi(x), \quad \phi_2(x), \quad \phi_3(x). \quad (29)$$

Для нового поля $\phi(x)$ полный лагранжиан модели принимает вид

$$\mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{L}^{(2)}(\epsilon) + \mathcal{L}^{(3)}(\epsilon) + \mathcal{L}^{(4)}(\epsilon). \quad (30)$$

Квадратичный по полям лагранжиан

$$\mathcal{L}^{(2)}(\epsilon) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 +$$

$$+ \epsilon_1^2 \left[-\frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^1)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^1)^2 \right] + \epsilon_2^2 \left[-\frac{1}{4}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^3)^2 \right] +$$

$$+ \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \left[-\frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^2)^2 \right], \quad (31)$$

где введены новые поля

$$B_\mu^1 = A_\mu^1 + \frac{1}{gv} \partial_\mu \phi_2, \quad B_\mu^2 = A_\mu^2 + \frac{1}{gv} \partial_\mu \phi_3, \quad (32)$$

описывает массивное скалярное поле материи χ , $m_\chi = \sqrt{2}\mu$ – хиггсовский бозон, два массивных векторных поля ($k = 1, 2$) с одинаковыми массами B_μ^k , $m_B = gv = \frac{g\mu}{\sqrt{\lambda}}$ и безмассовое поле A_μ^3 . Взаимодействия полей описываются слагаемыми третьего $\mathcal{L}^{(3)}(\epsilon)$ и четвертого $\mathcal{L}^{(4)}(\epsilon)$ порядков по полям

$$\mathcal{L}^{(3)}(\epsilon) = -\lambda v \chi^3 + \epsilon_1^2 \left\{ -\lambda v \chi (\phi_2^2 + \epsilon_2^2 \phi_3^2) + \right.$$

$$+ g [A_\mu^1 (\chi \partial_\mu \phi_2 - \phi_2 \partial_\mu \chi) +$$

$$+ \epsilon_2^2 A_\mu^2 (\chi \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \chi) +$$

$$+ \epsilon_2^2 A_\mu^3 (\phi_2 \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \phi_2)] +$$

$$+ g^2 v [A_\mu^1 (A_\mu^1 \chi - \epsilon_2^2 A_\mu^3 \phi_3) +$$

$$+ \epsilon_2^2 A_\mu^2 (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2)] \left. \right\} -$$

$$- \epsilon_1^2 \epsilon_2^2 \frac{g}{2} [\mathcal{F}_{\mu\nu}^1 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) +$$

$$+ \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3) +$$

$$+ \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)], \quad (33)$$

$$\mathcal{L}^{(4)}(\epsilon) = -\frac{\lambda}{4} \chi^4 + \epsilon_1^2 \frac{1}{2} \left\{ -\lambda \chi^2 (\phi_2^2 + \epsilon_2^2 \phi_3^2) - \right.$$

$$- \epsilon_1^2 \frac{\lambda}{2} (\phi_2^2 + \epsilon_2^2 \phi_3^2)^2 +$$

$$+ g^2 [\epsilon_1^2 (A_\mu^1 \phi_2 + \epsilon_2^2 A_\mu^2 \phi_3)^2 +$$

$$+ (A_\mu^1 \chi - \epsilon_2^2 A_\mu^3 \phi_3)^2 +$$

$$+ \epsilon_2^2 (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2)^2] -$$

$$- \epsilon_2^2 g^2 [\epsilon_2^2 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2)^2 +$$

$$+ (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3)^2 +$$

$$+ \epsilon_1^2 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2] \left. \right\}. \quad (34)$$

Полезно отметить, что теории с калибровочной группой Кэли-Клейна $SO(3; \epsilon)$ могут быть получены из $SO(3)$ калибровочной теории (формулы (30)–(34) при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$) заменой

$$v \rightarrow v, \quad \chi \rightarrow \chi, \quad \phi_2 \rightarrow \epsilon_1 \phi_2, \quad \phi_3 \rightarrow \epsilon_1 \epsilon_2 \phi_3,$$

$$A_\mu^1 \rightarrow \epsilon_1 A_\mu^1, \quad A_\mu^2 \rightarrow \epsilon_1 \epsilon_2 A_\mu^2, \quad A_\mu^3 \rightarrow \epsilon_2 A_\mu^3, \quad (35)$$

или

$$B_\mu^1 \rightarrow \epsilon_1 B_\mu^1, \quad B_\mu^2 \rightarrow \epsilon_1 \epsilon_2 B_\mu^2, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 \rightarrow \epsilon_2 \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 \quad (36)$$

для новых полей.

2.2. Калибровочная модель для группы Евклида E_3

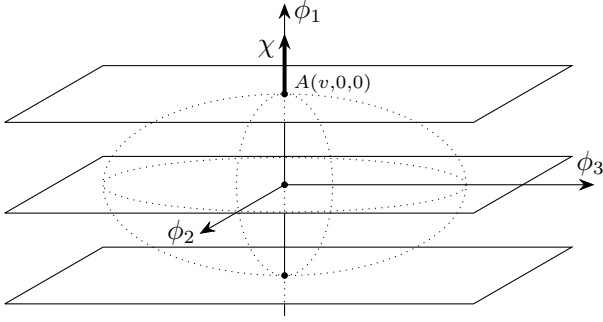


Рисунок 7. Плоскости основных состояний лагранжиана $\mathcal{L}(\epsilon_1)$.
Figure 7. Ground state planes of the Lagrangian $\mathcal{L}(\epsilon_1)$.

При $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 = 1$ группа $SO(3)$ контрактурируется в неполупростую группу Евклида E_3 . Метрика в пространстве полей материи вырождается $\phi^t(\epsilon_1)\phi(\epsilon_1) = \phi_1^2 + \epsilon_1^2(\phi_2^2 + \phi_3^2)$, и $\Phi_3(\epsilon_1)$ становится расслоенным пространством с одномерной базой $\{\phi_1\}$ и двумерным слоем $\{\phi_2, \phi_3\}$ (рис. 7). Лагранжиан (30)–(34) преобразуется к виду

$$\mathcal{L}(\epsilon_1) = \mathcal{L}_b(\epsilon_1) + \epsilon_1^2 \mathcal{L}_f(\epsilon_1) + \epsilon_1^4 \mathcal{L}_{int}(\epsilon_1),$$

где

$$\mathcal{L}_b(\epsilon_1) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \lambda \phi_0 \chi^3 - \frac{\lambda}{4} \chi^4 - \frac{1}{4}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^3)^2,$$

$$\mathcal{L}_f(\epsilon_1) =$$

$$= -\frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^1)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^1)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^2)^2 +$$

$$+ \mathcal{L}_f^{(3)}(\epsilon_1) + \mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_1),$$

$$\mathcal{L}_{int}(\epsilon_1) - \frac{\lambda}{2}(\phi_2^2 + \phi_3^2)^2 +$$

$$+ g^2 \left[(A_\mu^1 \phi_2 + A_\mu^2 \phi_3)^2 - (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2 \right]. \quad (37)$$

Здесь $\mathcal{L}_f^{(3)}(\epsilon_1)$ дается выражением (33) при $\epsilon_2 = 1$ без слагаемого $-\lambda \phi_0 \chi^3$, а $\mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_1)$ имеет вид

$$\mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_1) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\lambda \chi^2 (\phi_2^2 + \phi_3^2) + g^2 \left[(A_\mu^1 \chi - A_\mu^3 \phi_3)^2 + \right. \right.$$

$$\left. + (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2)^2 \right] -$$

$$\left. - g^2 \left[(A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2)^2 + (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3)^2 \right] \right\}. \quad (38)$$

Лагранжиан в базе $\mathcal{L}_b(\epsilon_1)$ описывает хиггсовский бозон χ со стандартной массой $m_\chi = \sqrt{2}\mu$, его самодействие и безмассовое векторное поле A_μ^3 . Лагранжиан в слое $\mathcal{L}_f(\epsilon_1)$ описывает два массивных векторных поля B_μ^1, B_μ^2 (32) с одинаковыми массами $m_B = gv$ и различные взаимодействия полей. Помимо этого, контрактурированный

лагранжиан $\mathcal{L}(\epsilon_1)$ содержит слагаемые, пропорциональные ϵ_1^4 , которые отвечают взаимодействию полей четвертого порядка.

Как и в случае калибровочной группы $SO(2; \epsilon)$, за счет калибровочных преобразований, связывающих вакуум в точке $A(v, 0, 0)$ с полями ϕ_2, ϕ_3 , можно преобразовать лагранжиан $\mathcal{L}(\epsilon_1)$ к виду, содержащему только калибровочные поля $\hat{B}_\mu^1, \hat{B}_\mu^2, A_\mu^3$, поле хиггсовского бозона χ и взаимодействия между ними.

Представления (37), (38) описывают порядок стремления к нулю слагаемых в лагранжиане при переходе к пределу $\epsilon_1 \rightarrow 0$. Вначале считаем малым и пренебрегаем лагранжианом $\mathcal{L}_{int}(\epsilon_1)$, далее малым будет лагранжиан $\mathcal{L}_f(\epsilon_1)$, окончательно получаем лагранжиан в базе $\mathcal{L}_b(\epsilon_1)$. Можно рассматривать и обратный процесс восстановления полей и взаимодействий при изменении параметра контракции ϵ_1 от нуля до единицы.

Теория с калибровочной группой Евклида E_2 может быть получена из $SO(3)$ калибровочной теории (формулы (30)–(34) раздела 2.1 при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$) заменой

$$v \rightarrow v, \chi \rightarrow \chi, \phi_2 \rightarrow \epsilon_1 \phi_2, \phi_3 \rightarrow \epsilon_1 \phi_3,$$

$$B_\mu^1 \rightarrow \epsilon_1 A_\mu^1, B_\mu^2 \rightarrow \epsilon_1 A_\mu^2, A_\mu^3 \rightarrow A_\mu^3 \quad (39)$$

с последующим переходом к пределу $\epsilon_1 \rightarrow 0$.

Если выбрать основное состояние, отвечающее точке $B(0, \frac{v}{\epsilon_1}, 0)$ на рис. 6, где $\phi_1 = 0$, то в пределе $\epsilon_1 \rightarrow 0$ его группой инвариантности окажется подгруппа $SO(2)$, рассмотренная в разделе 1.

2.3. Калибровочная модель для группы Ньютона N_3

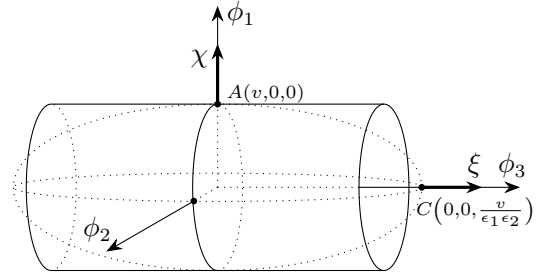


Рисунок 8. Цилиндр основных состояний лагранжиана $\mathcal{L}(\epsilon_2)$.
Figure 8. Cylinder of ground states of the Lagrangian $\mathcal{L}(\epsilon_2)$.

При $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 \rightarrow 0$ группа вращений $SO(3)$ контрактурируется в неполупростую группу Ньютона N_3 . Метрика в пространстве полей материи вырождается $\phi^t(\epsilon_2)\phi(\epsilon_2) = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \epsilon_2^2 \phi_3^2$, и $\Phi_3(\epsilon_2)$ становится расслоенным пространством с двумерной базой $\{\phi_1, \phi_2\}$ и одномерным слоем $\{\phi_3\}$. Лагранжиан модели

$$\mathcal{L}(\epsilon_2) = \mathcal{L}_b(\epsilon_2) + \epsilon_2^2 \mathcal{L}_f(\epsilon_2) \quad (40)$$

состоит из лагранжиана в базе

$$\mathcal{L}_b(\epsilon_2) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \mu^2 \chi^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^1)^2 + \frac{g^2 v^2}{2}(B_\mu^1)^2 +$$

$$+ \mathcal{L}_b^{(3)}(\epsilon_2) + \mathcal{L}_b^{(4)}(\epsilon_2), \quad (41)$$

который описывает хиггсовский бозон χ , массивный бозон B_μ^1 и взаимодействия вида

$$\mathcal{L}_b^{(3)}(\epsilon_2) = -\lambda v \chi^3 - \lambda v \chi \phi_2^2 + g A_\mu^1 (\chi \partial_\mu \phi_2 - \phi_2 \partial_\mu \chi),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b^{(4)}(\epsilon_2) = & -\frac{\lambda}{4}\chi^4 + \frac{g^2}{2}\chi^2(A_\mu^1)^2 - \frac{\lambda}{2}\chi^2\phi_2^2 + \\ & + \frac{g^2}{2}\phi_2^2(A_\mu^1)^2 - \frac{\lambda}{2}\phi_2^4 \end{aligned} \quad (42)$$

и лагранжиана в слое

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(\epsilon_2) = & -\frac{1}{4}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^3)^2 - \frac{1}{4}(B_{\mu\nu}^2)^2 + \frac{g^2v^2}{2}(B_\mu^2)^2 + \\ & + \mathcal{L}_f^{(3)}(\epsilon_2) + \mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_2), \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{(3)}(\epsilon_2) = & \left\{ -\lambda v \chi \phi_3^2 + \right. \\ & + g \left[A_\mu^2 (\chi \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \chi) + A_\mu^3 (\phi_2 \partial_\mu \phi_3 - \phi_3 \partial_\mu \phi_2) \right] + \\ & + g^2 \phi_0 A_\mu^2 (A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2) - \\ & - \frac{g}{2} \left[\mathcal{F}_{\mu\nu}^1 (A_\mu^2 A_\nu^3 - A_\mu^3 A_\nu^2) + \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 (A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3) + \right. \\ & \left. + \mathcal{F}_{\mu\nu}^3 (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1) \right] \left. \right\}, \\ \mathcal{L}_f^{(4)}(\epsilon_2) = & \frac{1}{2} \left\{ -\lambda \phi_3^2 (\chi^2 + \phi_2^2) + \right. \\ & + g^2 \left[(A_\mu^2 \chi + A_\mu^3 \phi_2)^2 + 2A_\mu^1 A_\mu^2 \phi_2 \phi_3 - 2A_\mu^1 A_\mu^3 \chi \phi_3 \right] - \\ & \left. - g^2 \left[(A_\mu^3 A_\nu^1 - A_\mu^1 A_\nu^3)^2 + (A_\mu^1 A_\nu^2 - A_\mu^2 A_\nu^1)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

Таким образом, лагранжиан в слое содержит безмассовое поле A_μ^3 , массивное поле B_μ^2 и взаимодействия полей.

Отметим, что лагранжиан $\mathcal{L}_b(\epsilon_2)$ в базе (41), (42) описывает те же поля, что и лагранжиан $L(\epsilon = 1)$ (7) модели с калибровочной группой $SO(2)$. Отличия в слагаемых, отвечающим взаимодействиям третьего и четвертого порядков, исчезают при избавлении от ϕ_2 путем перехода к полю \hat{B}_μ^1 аналогичного переходу от B_μ к \hat{B}_μ .

Теория с калибровочной группой Евклида N_2 может быть получена из $SO(3)$ калибровочной теории (формулы (30)–(34) раздела 2.1) при $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$) заменой

$$\begin{aligned} v \rightarrow v, \quad \chi \rightarrow \chi, \quad \phi_2 \rightarrow \phi_2, \quad \phi_3 \rightarrow \epsilon_2 \phi_3, \\ A_\mu^1 \rightarrow A_\mu^1, \quad A_\mu^2 \rightarrow \epsilon_2 A_\mu^2, \quad A_\mu^3 \rightarrow \epsilon_2 A_\mu^3 \end{aligned} \quad (45)$$

с последующим пределом $\epsilon_2 \rightarrow 0$.

Аналогично разделу 1, в калибровочной теории с группой $SO(3; \epsilon)$ при $\epsilon_k \neq 0, k = 1, 2$ в качестве вакуума можно выбрать любое основное состояние на эллипсоиде рис. 6. Однако, для того, чтобы получить теорию с полной трехпараметрической контрактивной группой Евклида E_3 или Ньютона N_3 при переходе к пределу $\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 = 1$ или $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 \rightarrow 0$, необходимо, чтобы выбранный вакуум (скажем, точка A на рис. 6) в соответствующем пределе принадлежал базе расслоенного пространства (рис. 7 или 8). Если же вакуум модели выбран, например, в точках

B или C на рис. 6, попадающих в пределе в слой, то получаем калибровочные модели, отвечающие соответствующим двухпараметрическим подгруппам исходной калибровочной группы.

3. Калибровочные теории с группами $SU(2; \epsilon)$

Унитарная контрактивная группа $SU(2; \epsilon)$ определяется как группа преобразований комплексного пространства $\mathbf{C}_2(\epsilon)$, оставляющая инвариантной квадратичную форму

$$\phi(\epsilon)^\dagger \phi(\epsilon) = |\phi_1(\epsilon)|^2 + \epsilon^2 |\phi_2(\epsilon)|^2. \quad (46)$$

Преобразования комплексных полей имеют вид

$$\begin{aligned} \phi'(\epsilon) &= u(\epsilon) \phi(\epsilon), \\ \begin{pmatrix} \phi'_1(\epsilon) \\ \epsilon \phi'_2(\epsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha(\epsilon) & \epsilon \beta(\epsilon) \\ -\epsilon \bar{\beta}(\epsilon) & \bar{\alpha}(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(\epsilon) \\ \epsilon \phi_2(\epsilon) \end{pmatrix}, \\ \det u(\epsilon) &= |\alpha(\epsilon)|^2 + \epsilon^2 |\beta(\epsilon)|^2 = 1, \\ u(\epsilon) u^\dagger(\epsilon) &= 1. \end{aligned} \quad (47)$$

Генераторы группы $SU(2; \epsilon)$ даны матрицами

$$\begin{aligned} T_1 &= \epsilon \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \epsilon \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ T_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (48)$$

подчиняются коммутационным соотношениям

$$[T_1, T_2] = i\epsilon^2 T_3, \quad [T_3, T_1] = iT_2, \quad [T_2, T_3] = iT_1 \quad (49)$$

и образуют алгебру $su(2; \epsilon)$.

В калибровочной теории с группой $SU(2; \epsilon)$ калибровочные поля

$$\begin{aligned} A_\mu(x; \epsilon) &= g \sum_{k=1}^3 T_k A_\mu^k(x) = \\ &= g \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 & \epsilon(A_\mu^1 + iA_\mu^2) \\ \epsilon(A_\mu^1 - iA_\mu^2) & -A_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (50)$$

принимают значения в алгебре Ли $su(2; \epsilon)$. Ковариантные производные равны

$$D_\mu \phi(\epsilon) = \partial_\mu \phi(\epsilon) - ig \left(\sum_{k=1}^3 T_k A_\mu^k \right) \phi(\epsilon), \quad (51)$$

где константа g является зарядом. Тензоры напряженности калибровочных полей определяются формулами

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu}(x; \epsilon) &= \mathcal{A}_{\mu\nu}(x; \epsilon) + g[A_\mu(x; \epsilon), A_\nu(x; \epsilon)], \\ \mathcal{A}_{\mu\nu}^k(x; \epsilon) &= \partial_\mu A_\nu^k(x; \epsilon) - \partial_\nu A_\mu^k(x; \epsilon). \end{aligned} \quad (52)$$

Вместо полей (50) вводятся новые калибровочные поля

$$\begin{aligned} Z_\mu(x) &= A_\mu^3(x), \\ W_\mu^\pm(x) &= \epsilon \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1(x) \mp iA_\mu^2(x)), \end{aligned} \quad (53)$$

которые в случае электрослабой модели имеют непосредственный физический смысл.

Лагранжиан модели $L(\epsilon) = L_A(\epsilon) + L_\phi(\epsilon)$ представляет собой сумму лагранжиана калибровочных полей

$$L_A(\epsilon) = -\frac{1}{4} \{ [\epsilon^2 (A_{\mu\nu}^1)^2 + (A_{\mu\nu}^2)^2] + (A_{\mu\nu}^3)^2 \} \quad (54)$$

и лагранжиана полей материи

$$L_\phi(\epsilon) = \frac{1}{2} (D_\mu \phi(\epsilon))^\dagger D_\mu \phi(\epsilon) - V(\phi; \epsilon). \quad (55)$$

Основные состояния лагранжиана $L(\epsilon)$ обнуляют калибровочный лагранжиан $L_A(\epsilon) = 0$ и доставляют минимум потенциалу

$$V(\phi; \epsilon) = \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger(\epsilon)\phi(\epsilon) - v^2)^2. \quad (56)$$

Эти состояния задаются уравнением

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \epsilon^2(\varphi_3^2 + \varphi_4^2) = v^2, \quad (57)$$

которое описывает трехмерный эллипсоид (сферу при $\epsilon = 1$) в четырехмерном пространстве $\Phi_4(\epsilon)$ вещественных полей φ_k , $k = 1, 2, 3, 4$, где $\phi_1 = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\phi_2 = \varphi_3 + i\varphi_4$. Данный трехмерный эллипсоид можно мыслить себе как поверхность, изображенную на рис. 6, если подразумевать под ϕ_3 двумерную плоскость, натянутую на φ_3, φ_4 , и положить $\phi_1 = \varphi_1$, $\phi_2 = \varphi_2$.

При $\epsilon \neq 0$ все основные состояния могут быть получены калибровочными преобразованиями из одного из них. Как и в случаях калибровочных моделей с ортогональными группами, рассмотренных в разделах 1 и 2, для получения калибровочной теории с трехмерной контрактивной унитарной группой, нужно вакуум модели выбрать в точке, попадающей в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ в слой пространства $\Phi_4(\epsilon)$.

Из соображений простоты вакуумный вектор можно взять в виде $(\phi^{vac})^t = (v, 0)$, т. е. $\varphi_1 = v, \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ (точка $A(v, 0, 0, 0)$ на эллипсоиде (57), рис. 6). После этого рассматриваются малые (линейные) возмущения поля φ_1 в окрестности вакуума

$$\varphi_1(x) = v + \chi(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \quad \varphi_4(x). \quad (58)$$

Для нового поля $\phi(x)$ полный лагранжиан модели принимает вид

$$\mathcal{L}(\epsilon) = \mathcal{L}^{(2)}(\epsilon) + \mathcal{L}^{int}(\epsilon), \quad (59)$$

где, как обычно, квадратичные по полям слагаемые лагранжиана $\mathcal{L}^{(2)}(\epsilon)$ описывают свободные частицы модели, а слагаемые более высокого порядка $\mathcal{L}^{int}(\epsilon)$ рассматриваются как их взаимодействия. Квадратичный лагранжиан

$$\mathcal{L}^{(2)}(\epsilon) = \mathcal{L}_0^{(2)}(\epsilon) + \epsilon^2 \mathcal{L}_2^{(2)}(\epsilon),$$

$$\mathcal{L}_0^{(2)}(\epsilon) =$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \frac{1}{4} \mathcal{Z}_{\mu\nu} \mathcal{Z}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z_\mu,$$

$$\mathcal{L}_2^{(2)}(\epsilon) = -\frac{1}{2} \mathcal{W}_{\mu\nu}^+ \mathcal{W}_{\mu\nu}^- + m_W^2 W_\mu^+ W_\mu^- \quad (60)$$

включает скалярное поле Хиггса χ с массой $m_\chi = \sqrt{2\lambda}v$, нейтральную Z и заряженные векторные частицы W^\pm с одинаковыми массами $m_Z = m_W = \frac{1}{2}gv$. Лагранжиан взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{L}^{int}(\epsilon) = \mathcal{L}_0^{int} + \epsilon^2 \mathcal{L}_2^{int} + \epsilon^4 \mathcal{L}_4^{int},$$

$$\mathcal{L}_0^{int} = -\frac{\lambda}{4} \chi^4 - \lambda v \chi^3 + \frac{gm_z}{2 \cos \theta_W} \chi (Z_\mu)^2 + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} \chi^2 (Z_\mu)^2,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{int} = & g\chi W_\mu^+ W_\mu^- + \frac{g^2}{4} \chi^2 W_\mu^+ W_\nu^- - \\ & - 2ig (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+) \mathcal{Z}_{\mu\nu} \cos \theta_W - \\ & - \frac{i}{2} g \cos \theta_W [Z_\mu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\nu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\nu^+) - \\ & - Z_\nu (\mathcal{W}_{\mu\nu}^+ W_\mu^- - \mathcal{W}_{\mu\nu}^- W_\mu^+)] - \\ & - \frac{g^2}{4} \cos \theta_W \left\{ [(W_\mu^+)^2 + (W_\mu^-)^2] (Z_\nu)^2 - \right. \\ & \left. - 2 (W_\mu^+ W_\nu^+ + W_\mu^- W_\nu^-) Z_\mu Z_\nu + \right. \\ & \left. + [(W_\nu^+)^2 + (W_\nu^-)^2] (Z_\mu)^2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_4^{int} = \frac{g^2}{4} (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^+)^2. \quad (61)$$

Как и в случае ортогональных групп Кэли-Клейна, теорию с унитарной калибровочной группой $SU(2; \epsilon)$ можно получить из $SU(2)$ калибровочной теории (формулы этого раздела при $\epsilon = 1$) заменой

$$v \rightarrow v, \quad \chi \rightarrow \chi, \quad \phi_1 \rightarrow \phi_1, \quad \phi_2 \rightarrow \epsilon \phi_2,$$

$$Z_\mu \rightarrow Z_\mu, \quad W^\pm \rightarrow \epsilon W^\pm. \quad (62)$$

Замечание. В стандартной электрослабой модели [8] с калибровочной группой $SU(2) \times U(1)$ в качестве вакуума выбирают поле $\phi_{vac}^t = (0, v)$, т. е. $\varphi_3 = v, \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_4 = 0$ (точка $C(0, 0, v, 0)$ на эллипсоиде (57), рис. 6). При $\epsilon = 1$ такой выбор приводит к тем же массам калибровочных полей, что и выбор поля $(\phi^{vac})^t = (v, 0)$, отвечающего точке $A(v, 0, 0, 0)$. Однако он не согласован с контракцией $\epsilon \rightarrow 0$. Правильные преобразования полей электрослабой модели при контракции даются формулами (62), как это сделано в работе [12].

4. Заключение

Контракции ортогональных и унитарных групп Кэли-Клейна и расслоения соответствующих пространств фундаментального представления тесно связаны между собой. Расслоенные пространства имеют вырожденную метрику и целый набор инвариантов относительно контрактивной группы [11]. Это означает, что в калибровочных теориях с контрактивными группами Кэли-Клейна пространства полей материи являются расслоенными пространствами. Для полного описания поведения физических систем в процессе предельного перехода необходимо рассматривать полное выражение для лагранжиана, в том числе и его зависимость от параметра контракции, а не только предельные лагранжианы в базе и слое. Это позволяет проследить порядок обнуления слагаемых в лагранжианах при стремлении параметров контракции к нулю, а также восстановление лагранжиана при обратном процессе – деформации.

Важное значение имеет выбор вакуума в механизме спонтанного нарушения симметрии. Чтобы получить теорию с полной контрактивной группой, имеющей ту же размерность, что и исходная калибровочная группа, необходимо, чтобы выбранный вакуум в соответствующем пределе принадлежал базе расслоенного пространства полей материи. Только в таком случае в контрактивной калибровочной теории получается тот же самый набор полей и частиц с теми же самыми массами, что и в исходной теории. Выбор вакуума, попадающего в пределе в слой, приводит к калибровочной модели, отвечающей подгруппе исходной калибровочной группы.

Поскольку именно структурные константы ответственны за взаимодействие полей и поскольку при контракциях групп Ли часть структурных постоянных их алгебр обращается в ноль, калибровочные теории, основанные на контрактивных неполупростых группах, описывают более простые взаимодействия полей, чем исходные теории, отвечающие простым или полупростым калибровочным группам.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Yang, C. N. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance / C. N. Yang, R. L. Mills // *Phys. Rev.* – 1954. – Vol. 96. – P. 191–195.
2. Weinberg, S. A model of leptons / S. Weinberg // *Phys. Rev. Lett.* – 1967. – Vol. 19. – P. 1264–1266.
3. Salam, A. In: *Elementary Particle Theory* (ed. by N. Svartholm) / A. Salam. – Almqvist Forlag AB, 1968.
4. Nappi, C. R. A WZW model based on non-semi-simple group / C. R. Nappi, E. Witten // *hep-th/9310112*.
5. Tseytlin, A. A. On gauge theories for non-semisimple groups / A. A. Tseytlin // *hep-th/9505129*.
6. Nuyts, J. Yang-Mills theory for non-semisimple groups / J. Nuyts, T. T. Wu // *hep-th/0210214*.

7. Gromov, N. A. Gauge theories for target spaces with degenerate metrics / N. A. Gromov // In “*Non-Euclidean Geometry in Modern Physics*” (Proc. 5th Int. Conf. Bolyai-Gauss-Lobachevsky, ed. Yu. Kurochkin and V. Red'kov). – Minsk, 2006. – P. 258–265. *hep-th/0611079*.
8. Рубаков, В. А. Классические калибровочные поля / В. А. Рубаков. – Москва : Эдиториал УРСС, Москва, 1999. – 336 с.
9. Higgs, P. W. / P. W. Higgs // *Phys. Lett.* – 1964. – Vol. 12. – P. 321.
10. Пименов, Р. И. Единая аксиоматика пространств с максимальной группой движений / Р. И. Пименов // *Литовский матем. сб.* – 1965. – Т. 5, № 3. – С. 457–486.
11. Громов, Н. А. Контракции классических и квантовых групп / Н. А. Громов. – Москва : Физматлит, 2012. – 318 с.
12. Громов, Н. А. Стандартная модель в ранней Вселенной / Н. А. Громов // *Известия Коми НЦ УрО РАН. Серия «Физико-математические науки».* – 2023. – № 4 (62). – С. 36–48.

References

1. Yang, C. N. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance / C. N. Yang, R. L. Mills // *Phys. Rev.* – 1954. – Vol. 96. – P. 191–195.
2. Weinberg, S. A model of leptons / S. Weinberg // *Phys. Rev. Lett.* – 1967. – Vol. 19. – P. 1264–1266.
3. Salam, A. In: *Elementary Particle Theory* (ed. by N. Svartholm) / A. Salam. – Almqvist Forlag AB, 1968.
4. Nappi, C. R. A WZW model based on non-semi-simple group / C. R. Nappi, E. Witten // *hep-th/9310112*.
5. Tseytlin, A. A. On gauge theories for non-semisimple groups / A. A. Tseytlin // *hep-th/9505129*.
6. Nuyts, J. Yang-Mills theory for non-semisimple groups / J. Nuyts, T. T. Wu // *hep-th/0210214*.
7. Gromov, N. A. Gauge theories for target spaces with degenerate metrics / N. A. Gromov // In “*Non-Euclidean Geometry in Modern Physics*” (Proc. 5th Int. Conf. Bolyai-Gauss-Lobachevsky, ed. Yu. Kurochkin and V. Red'kov). – Minsk, 2006. – P. 258–265. *hep-th/0611079*.
8. Rubakov, V. A. *Klassicheskiye kalibrovocnyye polya [Classical Gauge Fields]* / V. A. Rubakov. – Moscow : Editorial URSS, 1999. – 336 p.
9. Higgs, P. W. / P. W. Higgs // *Phys. Lett.* – 1964. – Vol. 12. – P. 321.
10. Pimenov, R. I. *Edinaya aksiomatika prostranstv s maksimal'noj gruppoj dvizhenij [Unified Axiomatics of spaces with maximal Movement Group]* / R. I. Pimenov // *Lithuanian Math. J.* – 1965. – Vol. 5, № 3. – P. 457–486.
11. Gromov, N. A. *Kontraktzii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups]* / N. A. Gromov. – Moscow : Fizmatlit, 2012. – 318 p.
12. Gromov, N. A. *Standartnaya model' v ranney Vselenoy [Standard Model in the Early Universe]* / N. A. Gromov // *Proc. of the Komi Sci. Centre, Ural Branch, RAS.* – 2023. – № 4(62). – P. 36–48.

Благодарность (госзадание)

Работа выполнена в рамках государственного задания ФМИ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН по теме НИР № 122040600066-5.

Acknowledgement (state task)

The work was done in frames of the State task of the Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UB RAS on the research topic № 122040600066-5.

Для цитирования:

Громов, Н. А. Контракции калибровочных групп и спонтанное нарушение симметрии / Н. А. Громов, В. В. Куратов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2024. – № 5 (71). – С. 28–37.

For citation:

Gromov, N. A. Contractions of gauge groups and spontaneous symmetry breaking / N. A. Gromov, V. V. Kuratov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series “Physical and Mathematical Sciences”. – 2024. – № 5 (71). – P. 28–37.

Дата поступления статьи: 21.03.2024

Received: 21.03.2024