



## Из опыта преподавания.

### X. Правильные, полуправильные и неправильные разбиения плоскости

Ю. Л. Войтеховский

Геологический институт ФИЦ КНЦ РАН, Апатиты  
Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург  
*Voytekhovskiy\_YuL@pers.spmi.ru*

Статья посвящена правильным, полуправильным и неправильным разбиениям плоскости, среди последних – разбиения на равные полигоны и произвольные разбиения с простыми узлами. Она продолжает авторские дополнительные лекции к университетскому учебнику «Кристаллография» Г. М. Попова и И. И. Шафрановского, рекомендованному студентам-геологам Санкт-Петербургского горного университета. Новая тема интересна тем, что первая задача решается элементарно в виде диофантова уравнения, вторая – алгоритмическим перебором вариантов, третья имеет отношение к 18-й проблеме Гильберта и на сегодня не исчерпана, а четвертая показывает переход к геометрии квазикристаллических и аморфных структур. Она дает примеры легко формулируемых, но трудно решаемых задач и побуждает студентов к научному творчеству в геометрической кристаллографии и смежных дисциплинах (петрографии, материаловедении). Изложение теории иллюстрировано примерами разбиений плоскости в городских интерьерах Санкт-Петербурга.

**Ключевые слова:** *правильные, полуправильные и неправильные разбиения плоскости, разбиения на равные полигоны, диофантово уравнение, алгоритм перебора, решетчатые системы на плоскости.*

## From teaching experience.

### X. Regular, semi-regular and irregular plane partitions

Yu. L. Voytekhovsky

Geological Institute of FRC KSC RAS, Apatity  
Saint Petersburg Mining University, Saint-Petersburg

The article deals with regular, semi-regular and irregular plane partitions, among the latter are partitions into equal polygons and arbitrary partitions with simple knots. It continues the author's supplementary lectures to the university textbook «Crystallography» by G. M. Popov and I. I. Shafranovsky, which was recommended to the students of geology of the St. Petersburg Mining University. The new topic is interesting because the first problem is solved elementary in the form of a Diophantine equation, the second is solved by algorithmic enumeration of variants, the third is related to the 18<sup>th</sup> Gilbert problem and is not exhausted yet, and the fourth shows the transition to the geometry of quasi-crystalline and amorphous structures. It gives examples of easily formulated but difficult to solve problems and encourages students to be scientifically creative in geometric crystallography and related disciplines (petrography, materials science). The presentation of the theory is illustrated with examples of plane partitions in urban interiors of St. Petersburg.

**Keywords:** *regular, semi-regular and irregular plane partitions, partitions into equal polygons, Diophantus equation, enumeration algorithm, lattice systems in the plane.*

#### Введение

Эта статья продолжает публикации автора [1–3] и, по-видимому, закрывает самые важные вопросы одно- и двумерной кристаллографии, которые весьма желательно донести до студентов перед преподаванием кристаллографии трехмерной. Рассмотрение линейных бордюров, их сочетаний в решетках и сетчатых орнаментов облегчает последующее усвоение трехмерных структур кристаллов. Но если в предыдущих статьях акцент сделан на трансляционном размножении некоторой фигуры в соответствии с группой симметрии плоскости или плоскости, то в этой статье сначала определяется правило примыкания полигонов друг к другу в узлах

разбиений плоскости, а их трансляционный характер оказывается нетривиальным результатом.

Тема о правильных, полуправильных и неправильных разбиениях плоскости (среди последних – разбиения на равные полигоны и произвольные разбиения с простыми узлами) интересна тем, что первая задача решается элементарно в виде диофантова (в натуральных числах) уравнения, вторая – перебором арифметических решений (алгоритмы могут быть разными) с последующей геометрической верификацией, третья имеет отношение к 18-й проблеме Гильберта и на сегодня решена компьютерным перебором вариантов, что не считается идеальным решением, а четвертая

**Для цитирования:** Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. X. Правильные, полуправильные и неправильные разбиения плоскости // Вестник геонаук. 2022. 2(326). С. 46–52. DOI: 10.19110/geov.2022.2.5.

**For citation:** Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. X. Regular, semi-regular and irregular plane partitions. Vestnik of Geosciences, 2022, 2(326), pp. 46–52, doi: 10.19110/geov.2022.2.5.

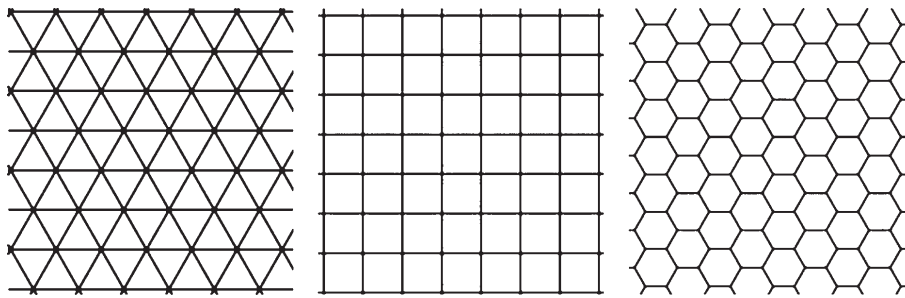


Рис. 1. Правильные разбиения плоскости (слева направо):  $(3_6)$ ,  $(4_4)$  и  $(6_3)$

Fig. 1. Regular plane partitions (from left to right):  $(3_6)$ ,  $(4_4)$  and  $(6_3)$

открывает простор для описания геометрии квазикристаллических и аморфных структур. Последняя дает примеры легко формулируемых, но трудных задач и побуждает студентов к научному творчеству в геометрической кристаллографии и смежных областях (петрографии, материаловедении, биологии тканей и др.).

### 1. Правильные разбиения

Правильным (платоновым) называется разбиение плоскости на правильные полигоны одного вида, примыкающие по целым сторонам. Внутренний угол при вершине правильного  $n$ -угольника равен  $\alpha_n = 180(n-2)/n$ . В узлах правильного разбиения должно сходиться целое число полигонов:  $360/\alpha_n = 2n/(n-2) = 2 + 4/(n-2)$ . Но 4 делится нацело лишь на 1, 2 и 4. Поэтому  $n = 3, 4$  и 6. Соответствующие разбиения даны на рис. 1. Их символы  $(3_6)$ ,  $(4_4)$  и  $(6_3)$  показывают, какие и сколько (нижний индекс) полигоны последовательно встречаются при обходе узла по или против часовой стрелки. Задача решилась простым диофантовым уравнением, для каждого решения нашлась ровно одна геометрическая реализация. Если центры полигонов, смежных по ребрам, соединить отрезками, то обнаружится дуализм разбиений  $(3_6)$  и  $(6_3)$ , разбиение  $(4_4)$  автодуально. Это подчеркивает смысл термина «платоновы разбиения», т. к. сходный дуализм имеет место в парах платоновых полиэдров: куб — октаэдр, додекаэдр — икосаэдр, тетраэдр автодуален.

### 2. Полуправильные разбиения: арифметика

Полуправильным (архимедовым) называется разбиение плоскости на правильные полигоны нескольких видов, примыкающие по целым сторонам и сходящиеся в узлах в том же или обратном порядке. Некоторой группой движений (поворотов, отражений

и трансляций) можно совместить любые два узла, при этом все разбиение совмещается с собой. Вместе с правильными разбиениями они называются сетками Шубникова — Лавеса [7, 9]. Современное изложение теории можно найти в работах [5, 6], результаты — в [4]. Мы дадим свой и, по-видимому, самый простой вывод полуправильных разбиений.

Подходя к их перечислению с прежних позиций, получим соотношение  $\sum k_n \alpha_n = 360$  и далее диофантово уравнение  $\sum k_n (1 - 2/n) = 2$ , где  $k_n$  — числа  $n$ -угольников в узле разбиения,  $n = 3, 4, 5, \dots$  не определены. Его решение кажется затруднительным, но положение спасает простое наблюдение:  $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 60 + 90 + 108 + 120 = 378 > 360$ . Сумма четырех самых малых  $\alpha_n$ , взятых по одному, превышает  $360^\circ$ . Т. е. в узлах разбиения могут сходиться полигоны лишь двух или трех видов (2- и 3-разбиения). Для дальнейшего полезно иметь таблицу углов  $\alpha_n$  (табл. 1).

#### 2.1. 2-разбиения

Назовем «младшим» в разбиении  $n$ -угольник с наименьшим  $n$ . Гексагон ( $\alpha_6 = 120$ ) таковым быть не может даже в одном экземпляре, т. к. любое добавление другого угла (в двух экземплярах) дает  $\Sigma > 360$ . Младший пентагон дает решение  $2\alpha_5 + \alpha_{10} = 360$  — символ  $(5_2 10)$ , младший квадрат — решение  $\alpha_4 + 2\alpha_8 = 360$  ( $48_2$ ), младший треугольник — 4 решения:  $4\alpha_3 + \alpha_6 = 360$  ( $3_4 6$ ),  $3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 360$  ( $3_3 4_2$ ),  $2\alpha_3 + 2\alpha_6 = 360$  ( $3_2 6_2$ ) и  $\alpha_3 + 2\alpha_{12} = 360$  ( $3, 12_2$ ).

#### 2.2. 3-разбиения

Аналогично, пентагон ( $\alpha_5 = 108$ ) младшим быть не может, даже в одном экземпляре, т. к. любое добавление двух разных углов в любом числе дает  $\Sigma > 360$ . (Лишь в случае  $\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 356 \frac{4}{7} < 360$ , но увеличение лю-

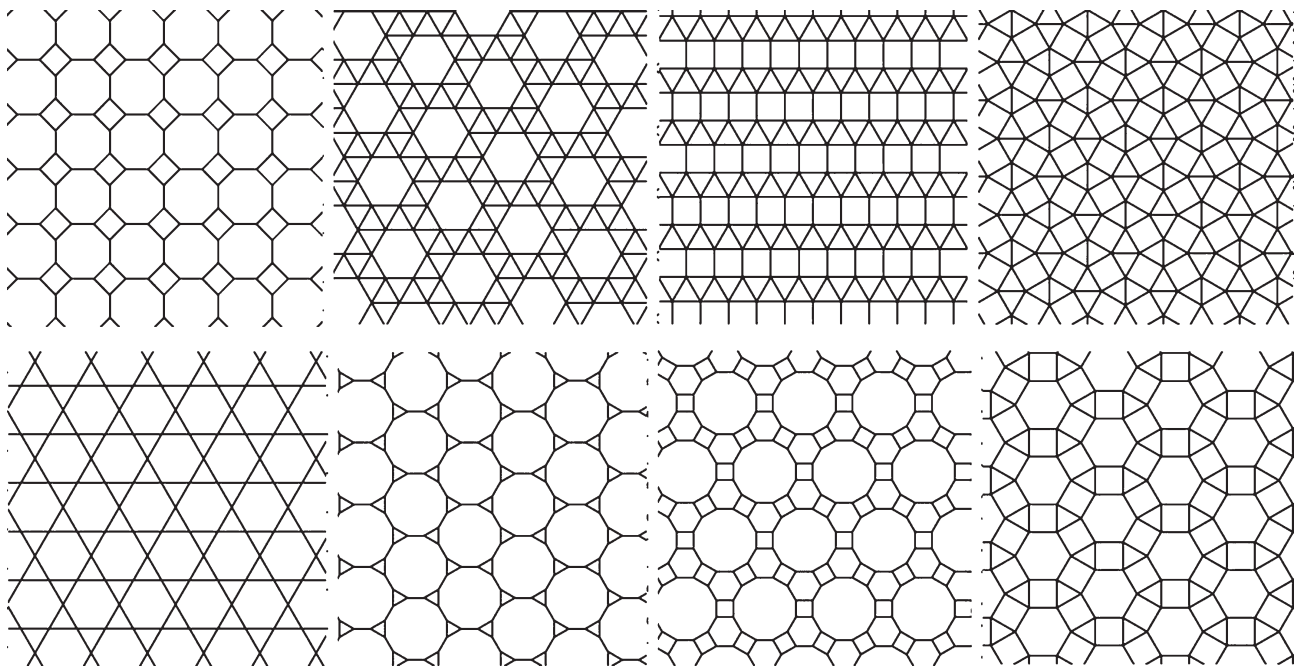
Таблица 1. Значения углов  $\alpha_n$  правильных  $n$ -угольников

Table 1. Values of angles  $\alpha_n$  of regular  $n$ -gons

<b>n</b>	3	4	5	6	7	8	9
<b><math>\alpha_n</math></b>	60	90	108	120	128 4/7	135	140
<b>n</b>	10	12	15	18	20	24	42
<b><math>\alpha_n</math></b>	144	150	156	160	162	165	171 3/7

Примечание: даны лишь те углы  $\alpha_n$ , которые встречаются далее в решениях.

Note: only those angles  $\alpha_n$  that occur further in the solutions are given.



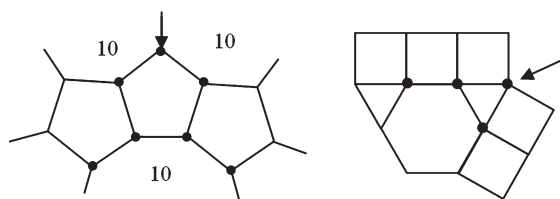
**Рис. 2.** Полуправильные разбиения. Вверху:  $(48_2)$ ,  $(3_4_6)$ ,  $(33344)$ ,  $(33434)$ . Внизу:  $(3636)$ ,  $(3,12_2)$ ,  $(4,6,12)$ ,  $(3464)$   
**Fig. 2.** Semi-regular partitions. Upper row:  $(48_2)$ ,  $(3_4_6)$ ,  $(33344)$ ,  $(33434)$ . Lower row:  $(3636)$ ,  $(3,12_2)$ ,  $(4,6,12)$ ,  $(3464)$

бого из углов превысит  $360^\circ$ ). Младший квадрат дает 2 решения:  $\alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_{12} = 360$   $(4,6,12)$  и  $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_{20} = 360$   $(4,5,20)$ , младший треугольник — 6 решений:  $2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_{12} = 360$   $(3_24,12)$ ,  $\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_6 = 360$   $(34_26)$ ,  $\alpha_3 + \alpha_7 + \alpha_{42} = 360$   $(3,7,42)$ ,  $\alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{24} = 360$   $(3,8,24)$ ,  $\alpha_3 + \alpha_9 + \alpha_{18} = 360$   $(3,9,18)$  и  $\alpha_3 + \alpha_{10} + \alpha_{15} = 360$   $(3,10,15)$ .

### 3. Полуправильные разбиения: геометрия

В отличие от правильных разбиений, здесь не каждое арифметическое решение отвечает геометрической реализации, и наоборот, одно решение может отвечать двум реализациям. Так, невозможно 2-разбиение  $(5_210)$ , а решение  $(3_34_2)$  отвечает разбиениям  $(33344)$  и  $(33434)$ , отличающимся чередованием треугольников и квадратов. Для 3-разбиений вообще возможны лишь две реализации:  $(4,6,12)$  и  $(34_26)$ , причем в варианте  $(3464)$ , вариант  $(3446)$  невозможен. Итого возможны 8 полуправильных разбиений плоскости (рис. 2).

Примеры противоречий, возникающих при построении геометрических реализаций арифметических решений, даны на рис. 3. Так, при построении раз-



**Рис. 3.** Геометрические противоречия арифметических решений, слева — при построении разбиения  $(5_210)$ , справа — разбиения  $(3446)$

**Fig. 3.** Geometric contradictions of arithmetic solutions, on the left — when constructing a partition  $(5_210)$ , on the right — a partition  $(3446)$

биения  $(5_210)$  сначала строим корону 5-угольников вокруг 10-угольника (внизу). Затем строим корону 10-угольников, в которой неизбежно образуются узлы вида  $(5,10_2)$  (показано стрелкой). Это и доказывает невозможность разбиения  $(5_210)$ .

Аналогично, при построении разбиения  $(3446)$  начинаем с построения короны вокруг 6-угольника. Заметим, что при обходе его вершин порядок следования полигонов (по и против часовой стрелки) чередуется, что разрешено. Но при этом неизбежно образуются узлы вида  $(3464)$  с разделенными квадратами (показано стрелкой), что запрещено. Это и доказывает невозможность разбиения  $(3446)$ .

### 4. Разбиения на равные полигоны

Далее речь пойдет о неправильных разбиениях плоскости, т. е. от полигонов более не требуется быть правильными. Но это не значит, что здесь все произвольно — полигоны и сочетания в узлах. Интересна задача о разбиениях плоскости на одинаковые выпуклые полигоны. У нее драматическая история.

Несложно доказать, что у искомого полигона может быть только 3, 4, 5 или 6 сторон. Также легко убедиться, что любой 3- и 4-угольник образует разбиение плоскости [10]. С 6-угольниками математики разобрались быстро. Обозначим (по часовой стрелке) углы  $A, B, C, D, E, F$ , стороны  $a, b, c, d, e, f$ , причем каждая сторона следует за одноименным углом. Доказано, что искомые 6-угольники принадлежат хотя бы одному из трех пересекающихся классов эквивалентности (так, правильный 6-угольник принадлежит всем): (1)  $A + B + C = 360$ , (2)  $A + B + D = 360$ ,  $a = d$ ,  $c = e$ , (3)  $A = C = E = 120$ ,  $a = b$ ,  $c = d$ ,  $e = f$ .

Гораздо сложнее найти разбиения плоскости на 5-угольники. К. Райнхардт (K. Reinhardt) первый опи-



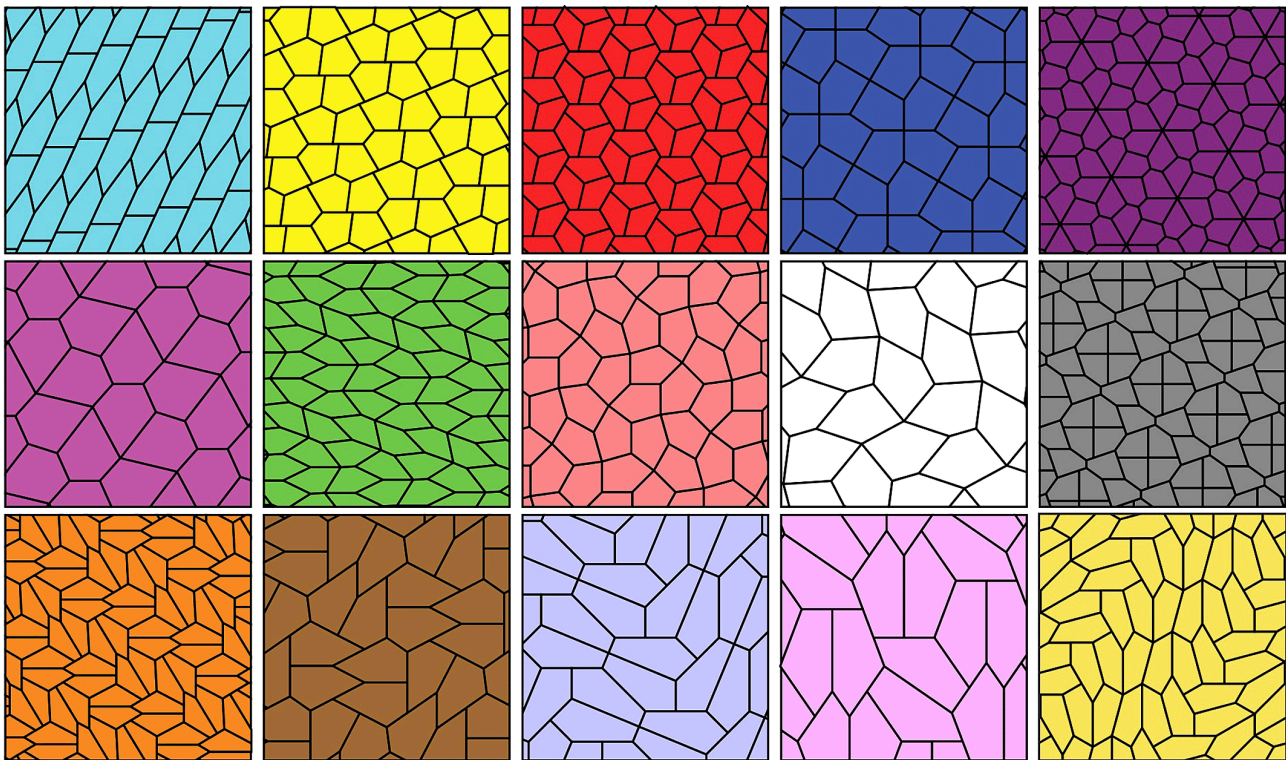


Рис. 4. Разбиения на равные 5-угольники (интернет, свободный доступ)

Fig. 4. Partitions into equal pentagons (Internet, free access)

сал 5 разбиений в докторской диссертации в 1918 г. Лишь через 50 лет Р. Кершнер [8] нашел еще 3 разбиения и заявил, что задача исчерпана. Но в 1975 г. Р. Джеймс (R. James) нашел новое разбиение. Об этом в Scientific American прочла домохозяйка и математик-любитель М. Райс (M. Rice) и за 10 лет нашла еще 5 разбиений. К. Манн с соавторами (C. Mann, J. McLoud-Mann, D. von Derau) в 2015 г. с помощью компьютера нашли 15-е разбиение. М. Рао (M. Rao) в 2017 г. построил классификацию с 371 вариантом, перебрал их на компьютере, подтвердил найденные разбиения и показал, что других быть не может (рис. 4). Задача вроде бы решена, но перебор с помощью компьютера математики не считают идеальным решением. Поиск такого продолжается.

Почему эта задача так интересует математиков? Во-первых, потому что имеет отношение к 18-й проблеме Гильберта, в числе других провозглашенной на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г. Задача состоит из трех вопросов: конечно ли число кристаллографических групп, существуют ли нерегулярные заполнения пространства равными многогранниками, являются ли гексагональная и кубическая гранецентрированная упаковки шаров самыми плотными? На все уже получены положительные ответы. Очевидно, если понизить размерность пространства, второй вопрос превращается в задачу о разбиениях плоскости на равные полигоны. Во-вторых, она утопает в более общей проблеме оптимальных покрытий не только плоских, но и кривых поверхностей минимальными наборами строительных блоков. Так строят свои капсиды икосаэдрические вирусы, на наших глазах показывающие свою эффективность. И других обоснований важности проблемы не нужно.

### 5. Разбиения с простыми узлами

Под такими будем понимать разбиения плоскости на любые полигоны, сходящиеся по три в каждом узле. Слегка идеализируя, эти разбиения легко найти вокруг. Это кракелюры на старых картинах, трещины на штукатурке или краске в вашей парадной, на глинистом дне высохшей лужи, на асфальте (рис. 5)... Казалось бы, уж здесь-то не может быть никаких закономерностей. Но все не так просто.

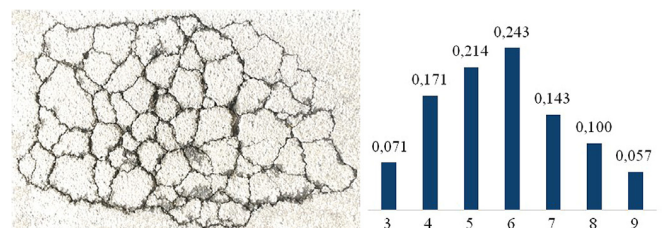


Рис. 5. Разбиения с простыми узлами

Fig. 5. Partitions with simple nodes

Для любого плоского графа имеет место теорема Эйлера:  $f - e + v = 2$ , где  $f$  — число клеток,  $e$  — ребер,  $v$  — вершин. Если из каждой вершины выходят ровно три ребра, то  $3v = 2e$  и  $e = 3f - 6$ . Тогда средняя координация клетки равна:  $c = 2e / f = 6 - 12/f \rightarrow 6$  при  $f \rightarrow \infty$ . Строгое равенство  $c = 6$  отвечает правильному разбиению  $b_3$  (рис. 1). Здесь уместно вспомнить его природную реализацию — пчелиные соты. Статистика для рис. 5:  $f = 71$  (в долях единицы — частоты разных клеток),  $e = 225$ ,  $v = 156$ ,  $M_0 = 6$ ,  $c = 5.74$ ,  $\sigma = 1.59$ ,  $A_s = 0.23$ ,  $E_x = -0.82$ . Таким образом, даже в столь непра-



вильных разбиениях сквозь асимптотику  $f \rightarrow \infty$  выступает важный инвариант плоскости  $s = 6$ , а значит и дуальные разбиения  $(6_3)$  и  $(3_6)$ .

## 6. Разбиения в городских интерьерах

Правильные разбиения легко найти в питерских городских интерьерах, чаще всего в напольных и настенных покрытиях, но не только. На рис. 6 показаны разбиения  $(3_6)$  в рисунке ковра,  $(4_4)$  — в укладке тротуара гранитными кубиками и  $(6_3)$  — в замощении пола керамической плиткой.

Из полуправильных 2-разбиений чаще всего встречается  $(48_2)$ , иногда замаскированное дополнительными дизайнерскими элементами или наложениями. На рис. 7 показаны: решетка подземного перехода через пр. Добролюбова у станции метро «Спортивная»,

настенное покрытие с наложением правильного разбиения  $(4_4)$  (Большой пр. П. С.), витраж в окне (Кронверкский пр.), деревянная дверь (ул. Шевченко) и пол в парадной жилого дома (1 линия В. О., в старых домах кое-где сохранилась метлахская плитка).

Гораздо реже встречается 2-разбиение  $(3636)$ . На рис. 8 показаны два напольных покрытия в парадных жилых домов (Петроградская сторона) и необычный тротуар (ул. Б. Морская). В первом разбиение узнается легко, во втором — после удаления графики внутри 6-угольников, окруженных темно-серыми треугольниками, в третьем — после соединения отрезками точек касания дисков. 2-разбиение  $(3,12_2)$  встречено нами однажды на персидском ковре (магазин на Малом пр. П. С.). Оно легко узнается, если убрать графику из 12-угольников, окружающих зеленые треугольники.

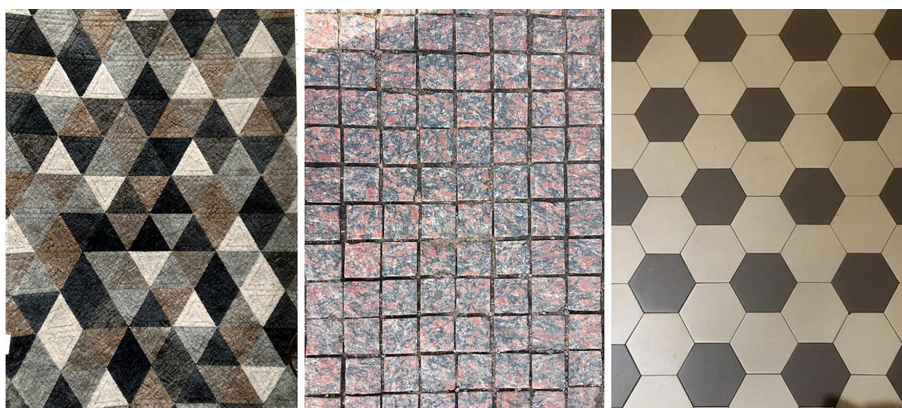


Рис. 6. Правильные разбиения  $(3_6)$ ,  $(4_4)$  и  $(6_3)$  / Fig. 6. Regular partitions  $(3_6)$ ,  $(4_4)$  and  $(6_3)$



Рис. 7. Полуправильные 2-разбиения  $(48_2)$  / Fig. 7. Semi-regular 2-partitions  $(48_2)$





Рис. 8. Полуправильные 2-разбиения (3636) и (3,12<sub>2</sub>) / Fig. 8. Semi-regular 2-partitions (3636) and (3,12<sub>2</sub>)

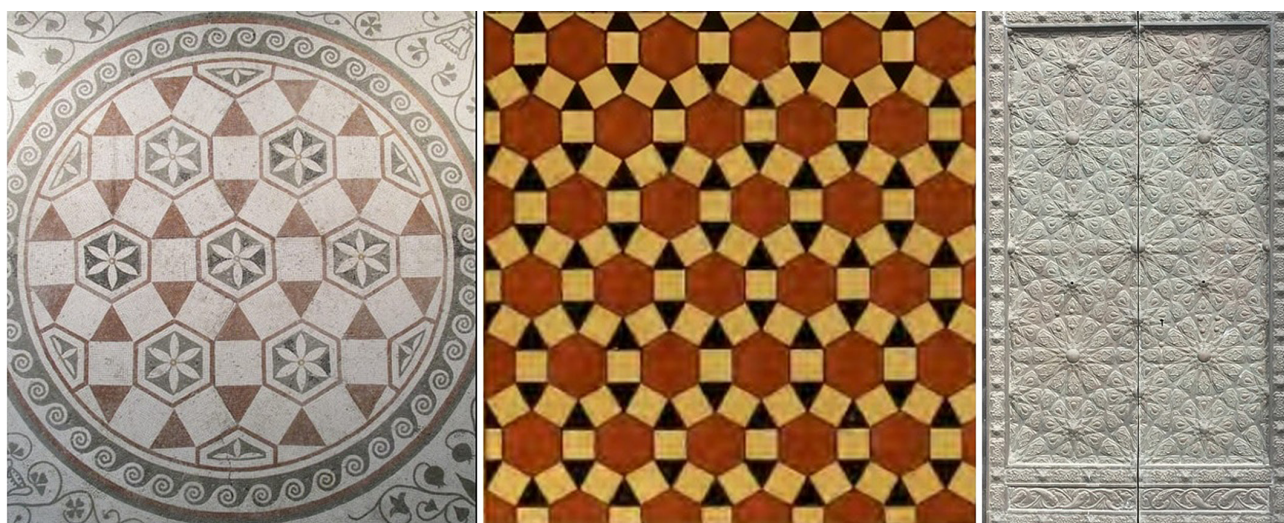


Рис. 9. Полуправильные 3-разбиения (3464) и (4,6,12) / Fig. 9. Semi-regular 3-partitions (3464) and (4,6,12)

Полуправильные 3-разбиения совсем редки (рис. 9). Разбиение (3464) в двух вариантах подарил тот же магазин персидских ковров. Разбиение (4,6,12), весьма завуалированное и с деформированными квадратами, можно видеть на двери соборной мечети Санкт-Петербурга.

Разбиение на равные пентагоны встретилось нам однажды в напольном покрытии керамической плиткой (рис. 10). А вот элегантное итальянское стеновое покрытие при внимательном рассмотрении оказалось неправильным разбиением с простыми узлами, хотя и похоже на некоторые разбиения с рис. 4.

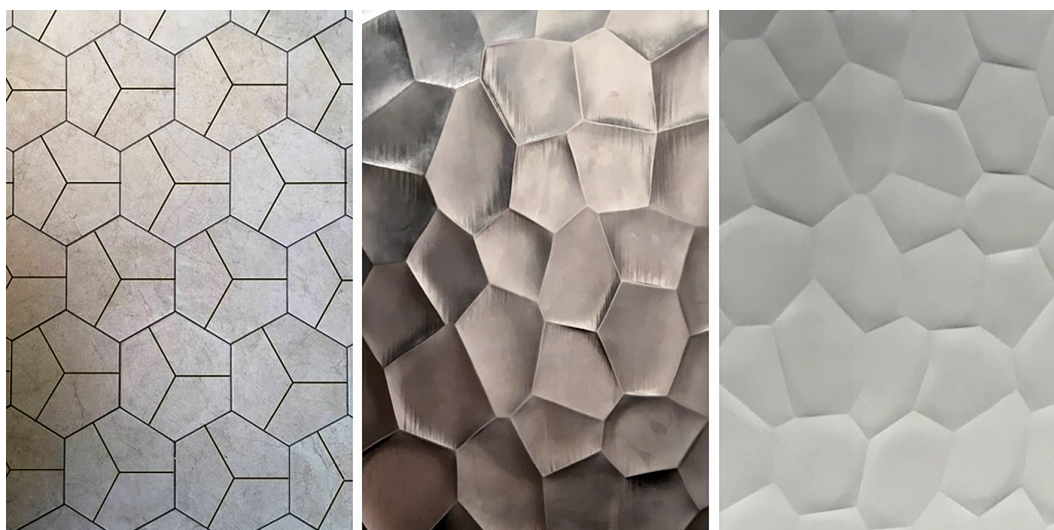


Рис. 10. Разбиения на равные пентагоны (слева) и с простыми узлами  
Fig. 10. Partitions into equal pentagons (left) and with simple nodes





В чем причина столь малого распространения полуправильных разбиений (5 из 8) и разбиений на равные полигоны (1 из 15) в покрытиях керамической плиткой? Скорее всего, в относительной сложности изготовления и сборки по сравнению с правильными разбиениями. Самое частое 2-разбиение ( $48_2$ ) — единственное, не содержащее мелких треугольников, а 8-угольник, образующий каркас разбиения, получается технологически простым обрезанием вершин квадрата. По-видимому, отсутствующие разбиения следует искать в ковровых изделиях и произведениях дизайна.

## Заключение

Нетривиальным результатом оказалось то, что все правильные и полуправильные разбиения суть сетчатые орнаменты [3], а именно:  $(3_6)$ ,  $(6_3)$ ,  $(3636)$ ,  $(3,12_2)$ ,  $(4,6,12)$  и  $(3464)$  —  $6mm$   $a/a$ ;  $(4_4)$  и  $(48_2)$  —  $4mm$   $a/a$ ;  $(33344)$  и  $(33434)$  —  $mm2$   $a/a$ ;  $(3_46)$  —  $2$   $a/b$ . Последнее имеет только поворотные оси, следовательно, энантиоморфную пару.

Бытует мнение, что законы кристаллографии очень ограничивают творчество. Это не так. Как показано выше, они лишь четко определяют законы композиции. Ослабление условий увеличивает разнообразие вариантов. Правильных разбиений плоскости — 3, полуправильных — 8 (3-разбиений — 2, 2-разбиений — 6), на равные пентагоны — 15, на равные 3-, 4-, 6-угольники (последние укладываются в 3 класса эквивалентности) и с простыми узлами — бесконечно много. Природе и дизайнерам есть из чего выбирать. А в перспективе — 3D-структуры и вершина кристаллографии — 230 пространственных (федоровских) групп симметрии.

*Автор благодарит своих ассистентов, студентов Санкт-Петербургского горного университета С. И. Азаренко и Е. А. Потанину за обсуждение темы.*

## Литература

1. Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. VI. Симметрия бордюров // Вестник геонаук. 2020. № 8. С. 28–31. DOI: 10.19110/geov.2020.8.4.
2. Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. VII. Соподчинение групп симметрии и кристаллографический критерий гармонии // Вестник геонаук. 2021. № 2. С. 19–22. DOI: 10.19110/geov.2021.2.4.

3. Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. VIII. Сетчатые орнаменты // Вестник геонаук. 2021. № 7. С. 13–18. DOI: 10.19110/geov.2021.7.2.
4. Галиулин Р. В. Кристаллографическая геометрия. М.: Либроком, 2009. 136 с.
5. Делоне Б. Н. Теория планигонов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23. С. 365–386.
6. Делоне Б. Н., Долбилин Н. П., Штогрин М. И. Комбинаторная и метрическая теория планигонов // Тр. МИАН СССР. 1978. Т. 148. С. 109–140.
7. Шубников А. В. К вопросу о строении кристаллов // Изв. АН. Сер. 6. 1916. Т. 10. № 9. С. 755–779.
8. Kershner R. B. On paving the plane // Amer. Math. Monthly. 1968. N 75. P. 839–844.
9. Laves F. Einteilung und Koordinationszahl // Zeitschr. Kristallogr. 1931. Bd. 78. S. 208–241.
10. Schattschneider D. Tiling the plane with congruent pentagons // Math. Mag. 1978. N 51. P. 29–44.

## References

1. Voytekhovskiy Yu. L. From teaching experience. VI. Symmetry of borders. Vestnik of Geosciences, 2020, 8, pp. 28–31. DOI: 10.19110/geov.2020.8.4.
2. Voytekhovskiy Yu. L. From teaching experience. VII. Subordination of symmetry groups and crystallographic criterion of harmony. Vestnik of Geosciences, 2021, 2, pp. 19–22. DOI: 10.19110/geov.2021.2.4.
3. Voytekhovskiy Yu. L. From teaching experience. VIII. Grid ornaments. Vestnik of Geosciences, 2021, 7, pp. 13–18, DOI: 10.19110/geov.2021.7.2.
4. Galiulin R. V. *Kristallograficheskaya geometriya* (Crystallographic Geometry) Moscow: Librocom Book House, 2009, 136 pp.
5. Delaunay B. N. The theory of planigons. Izvestiya Acad. Sci. USSR, Ser. math., 1959, 23, pp. 365–386.
6. Delaunay B. N., Dolbilin N. P., Shtogrin M. I. Combinatorial and metric theory of planigons. Proc. Math. Inst. Acad. Sci. USSR, 1978, 148, pp. 109–140.
7. Shubnikov A. V. On the crystal structure. Izvestiya Acad. Sci., Ser. 6, 1916, 10, 9, pp. 755–779.
8. Kershner R. B. On paving the plane. Amer. Math. Monthly, 1968, 75, pp. 839–844.
9. Laves F. Einteilung und Koordinationszahl. Zeitschr. Kristallogr., 1931, 78, pp. 208–241.
10. Schattschneider D. Tiling the plane with congruent pentagons. Math. Mag., 1978, 51, pp. 29–44.

Поступила в редакцию / Received 09.12.2021

Редакторы издательства:

О. В. Габова, К. В. Ордин

Компьютерная верстка:

А. Ю. Перетягин

Свид. о рег. средства массовой информации ПИ № ФС77-75435 от 19.04.2019, выданное Роскомнадзором. Отпечатано: 31.03.2022. Формат бумаги 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Печать RISO. Усл. п. л. 6,5. Тираж 140. Заказ 1180. Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр «Коми научный центр Уральского отделения Российской академии наук» (ФИЦ Коми НЦ УрО РАН). Редакция, издательство, типография: издательско-информационный отдел Института геологии имени академика Н. П. Юшкина Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук Федерального государственного бюджетного учреждения науки Федерального исследовательского центра «Коми научный центр Уральского отделения Российской академии наук» (ИГ ФИЦ Коми НЦ УрО РАН).

Адрес: 167982, Республика Коми, Сыктывкар, Первомайская, 54. Тел.: (8212) 24-51-60. Эл. почта: vestnik@geo.komisc.ru  
На обложке использованы фото А. Антошкиной, К. Повасева, И. Астаховой, А. Журавлева, Н. Воробьева.