

# Об одной контракции дискретной группы $D_3$

И.В. Костяков, В.В. Куратов

Физико-математический институт  
ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
г. Сыктывкар

kostyakov@ipm.komisc.ru,  
kuratov@ipm.komisc.ru

## Аннотация

Группы движений двумерных моделей пространства-времени с геометрической точки зрения являются группами движений двумерных однородных пространств постоянной кривизны. При квантовании подобных моделей важную роль играют их дискретные подгруппы. Стандартная модель строится на калибровочных группах  $U(1)$ ,  $SU(2)$  и  $SU(3)$ . Дискретные подгруппы этих групп сейчас также в центре внимания в физике элементарных частиц. В работе представлены контракции дискретной группы диэдра  $D_3$ , индуцированные предельными переходами в непрерывных группах  $O(2)$  и  $O(3)$ . В результате возникают группы  $D_4$  и бесконечные группы  $D_\infty$ , порождающие дискретные решетки соответствующих двумерных моделей пространства-времени. Обсуждаются также переходы дискретных групп симметрии платоновых тел.

## Ключевые слова:

дискретные группы, контракции групп Ли

## Введение

Дискретные симметрии играют важную роль в физике. Одним из примеров является СРТ-инвариантность — фундаментальная симметрия физических законов. В калибровочных теориях дискретные симметрии возникают в различных аспектах. Многие фундаментальные характеристики полей и элементарных частиц могут описываться не группами Ли, как принято, а дискретными группами симметрий. Например, группу диэдра  $D_3$  с образующими  $R_1$  и  $R_2$  и соотношениями  $R_i^2 = 1$  и  $(R_1 R_2)^3 = 1$  можно взять в качестве симметрии триплета  $SU(3)$  кварков [1].

Неабелевы дискретные симметрии играют заметную роль в моделях смешивания лептонов и могут появиться при спонтанном нарушении симметрии неабелевой непрерывной калибровочной теории [2–7].

Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны (пространств Евклида  $E^n$ , Лобачевского  $H^n$ , сфер  $S^n$ ) возникают и в различных областях математики и ее приложений [8]. Например, группы симметрии правильных многогранников и кристаллов и т.д.

Е.С. Федоров получил правильные системы точек на

# On one contraction of a discrete group $D_3$

I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov

Institute of Physics and Mathematics,  
Federal Research Centre Komi Science Centre, Ural Branch, RAS,  
Syktyvkar

kostyakov@ipm.komisc.ru,  
kuratov@ipm.komisc.ru

## Abstract

The groups of motions of two-dimensional space-time models from a geometric point of view are groups of motions of two-dimensional homogeneous spaces of a constant curvature. When quantizing these models, discrete subgroups of these groups play an important role. The standard model is based on the gauge groups  $U(1)$ ,  $SU(2)$  and  $SU(3)$ . Discrete subgroups of these groups are now also in the center of attention in the elementary particle physics. In this paper we present contractions of the discrete dihedral group  $D_3$  induced by limit transitions in the continuous group  $O(2)$  and  $O(3)$ . The resulting groups are  $D_4$  and infinite groups  $D_\infty$ , generating discrete lattices of two-dimensional space-time models. We also discuss transitions of discrete symmetry groups of the Platonic solids.

## Keywords:

discrete groups, contractions of Lie groups

двумерной сфере — тела Платона, Архимеда и две бесконечные серии полуправильных призм и полуправильных антипризм, которые являются орбитами соответствующих дискретных групп. Например, электроны на сфере приобретают устойчивое состояние только тогда, когда они занимают вершины какой-либо из этих правильных систем [9]. Примером сферического кристалла является фуллерен  $C^{60}$ . Он обладает группой симметрии икосаэдра и его можно считать двумерным сферическим алмазом, а графит — двумерным евклидовым алмазом. В качестве примера двумерного алмаза на плоскости Лобачевского приведем кристалл доломита. В пространстве Лобачевского квазикристалл можно считать идеальным кристаллом [10].

Дискретные подгруппы группы Лоренца возникают при построении теории квантованного пространства-времени, которое обладало бы некоторой дискретной симметрией, переходящей в лоренцеву симметрию в континуальном пределе. При таком дискретном преобразовании пространство-время, представляемое 1+3-мерной решеткой, должно переходить само в себя [11]. Например, в работе Дирака [12]

изучалась дискретная подгруппа группы Лоренца, которая в сочетании с дискретными подгруппами трансляций давала дискретную подгруппу группы Пуанкаре, и были рассмотрены простейшие четырехмерные пространственно-временные решетки.

Дискретные группы позволяют находить точные решения квантовых систем. Например, принцип инвариантности относительно дискретной подгруппы Лоренца, действующей независимо на состояния частиц с различными импульсами, приводит к определению всех элементов двухчастичной  $S$ -матрицы, удовлетворяющей уравнению треугольников (или уравнению Янга-Бакстера) [13].

Группа диэдра  $D_3$  может рассматриваться как дискретная подгруппа непрерывных групп  $O(2)$  или  $O(3)$ , контракции которых хорошо изучены [14]. Мы приведем несколько примеров, куда перейдет  $D_3$  при некоторых контракциях непрерывных групп  $O(2)$  и  $O(3)$  и как при этом выглядят орбиты этих дискретных групп в соответствующих одно- и двумерных пространствах Кэли-Клейна.

## 1. Дискретные группы в одномерных пространствах Кэли-Клейна

Одномерные группы вращения Галилея и Минковского можно записать единым образом [14], используя параметр контракции  $j = 1, i, i^2 = 0, i^2 = -1$

$$G = \begin{pmatrix} \cos j\phi & -j \sin j\phi \\ \frac{1}{j} \sin j\phi & \cos j\phi \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Они являются группами симметрии соответствующих окружностей  $S_1(j)$  на плоскостях  $R_2(j) = (x_1, jx_2)$

$$x_1^2 + j^2 x_2^2 = a^2 \quad (2)$$

и сохраняют метрику

$$ds^2 = dx_1^2 + j^2 dx_2^2. \quad (3)$$

Вышеприведенные формулы описывают одномерные пространства и группы Кэли-Клейна. В случае  $j = 1$ , формула (1) дает обычные вращения, при  $j = i$  или  $j = i$  получим

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \phi & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad G = \begin{pmatrix} \text{ch } \phi & \text{sh } \phi \\ \text{sh } \phi & \text{ch } \phi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

определяющие группу поворотов (сдвигов) на плоскости Галилея и группу лоренцевых вращений на плоскости Минковского. В последних двух случаях  $x_1$  интерпретируется как время  $t$ , а  $x_2$  — как одномерное пространство  $r$ .

Опишем дискретные подгруппы этих групп. Рассмотрим группу симметрии правильного  $n$ -угольника, или группу диэдра  $D_n$ . Ее можно реализовать как дискретную подгруппу  $O(2)$ , состоящую из группы вращений с образующей

$$R = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}, \quad R^n = 1 \quad (5)$$

и образующей

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_1^2 = 1, \quad (6)$$

являющейся отражением относительно оси  $x_1$ .

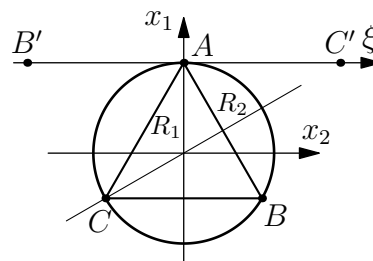


Рисунок 1. Правильный треугольник ( $n = 3$ ) на окружности  $S^1$  евклидовой плоскости.

Figure 1. Regular triangle ( $n = 3$ ) on the circle  $S^1$  of the Euclidean plane.

Данная группа изоморфна полупрямому произведению  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}_n$ . Генетический код этой группы можно задавать разными способами, выбирая разные образующие [15]. Например,  $R_1^2 = 1, R^n = 1, (R_1 R)^2 = 1$  или  $R_1^2 = 1, R_2^2 = 1, (R_1 R_2)^n = 1$ , где  $R_2$  можно выбрать как отражение относительно прямой, повернутой на угол  $\frac{\pi}{n}$  относительно оси  $x_1$

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ -\sin \frac{2\pi}{n} & -\cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix},$$

$$R_2^2 = 1, \quad R_1 R_2 = R.$$

Действуя на начальную точку  $A$  преобразованиями, задаваемыми элементами всей группы, можно получить остальные точки правильного  $n$ -угольника. На рис. 1 изображен случай треугольника  $n = 3$ .

Для эллиптической геометрии на прямой с бельтрамиевой координатой  $\xi = a \frac{x_2}{x_1}$  отражения  $R_1$  и  $R_2$  из группы диэдра  $D_3$  выглядят следующим образом

$$\xi' = R_1 \cdot \xi = -\xi,$$

$$\xi' = R_2 \cdot \xi = -\frac{\xi + \sqrt{3}a}{1 - \frac{\sqrt{3}\xi}{a}},$$

а действие образующей  $R = R_1 R_2$  циклической подгруппы вращения имеет вид

$$\xi' = R \cdot \xi = \frac{\xi + \sqrt{3}a}{1 - \frac{\sqrt{3}\xi}{a}} = -R_2 \cdot \xi.$$

Орбита представленной группы состоит из точек  $A, B', C'$  с координатами  $\xi_{B'} = -\sqrt{3}a, \xi_A = 0, \xi_{C'} = \sqrt{3}a$  (рис. 1). При этом отражение  $R_2$  оставляет на месте точку  $C'$  и меняет местами точки  $A$  и  $B'$ . Отражение  $R_1$  оставляет на месте точку  $A$  и меняет местами точки  $B'$  и  $C'$ . Поворот  $R$  точку  $B'$  переводит в  $A$ , точку  $A$  переводит в  $C'$  и точку  $C'$  — в  $B'$ .

Теперь посмотрим, куда перейдет группа симметрий правильного  $n$ -угольника при  $j = i$  в формулах (1), (2). Образующие  $R_1$  и  $R_2$  при этом будут иметь вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & -1 \end{pmatrix},$$

$$R_1^2 = R_2^2 = 1.$$

Здесь мы обозначили  $v = -\frac{2\pi}{n}$ .  $R_1$  — отражение относительно оси  $x_1$ ,  $R_2$  — отражение относительно прямой, параллельной оси  $x_1$ , находящейся на расстоянии  $\frac{v}{2}$  от нее.

При непрерывном аналоге  $j = \varepsilon \rightarrow 0$  контракции  $j = \iota$  можно считать, что совершается непрерывное устремление радиуса окружности к бесконечности  $a \rightarrow \infty$ , при котором прямые, пересекающиеся в центре окружности под углом  $\phi$  становятся параллельными. Произведение двух отражений относительно параллельных осей, разделенных расстоянием  $\frac{v}{2}$ , будет сдвигом («вращением» на плоскости Галилея) на  $v$ . Матрица сдвига, являющаяся в этом случае и образующей подгруппы сдвигов («вращений») на плоскости Галилея, имеет вид

$$R = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}, \quad R^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ nv & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Подгруппа с образующей  $R$  изоморфна  $\mathbb{Z}$ , а вся группа  $D_\infty$ , построенная на двух образующих  $R_1$  и  $R_2$  или  $R_1$  и  $R$ , изоморфна полупрямому произведению  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}$ . Стартуя с начальной точки  $A$ , действуя отражениями  $R_1$  и  $R_2$ , можно получить всю решетку на окружности плоскости Галилея (рис. 2).

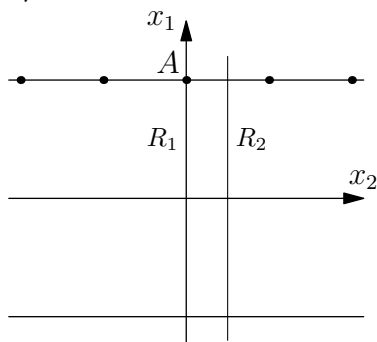


Рисунок 2. Решетка на окружности плоскости Галилея, полученная действием  $R_1, R_2$ .

Figure 2. Lattice on a circle of the Galilean plane, obtained by the action of  $R_1, R_2$ .

Возможен еще один выбор образующих, а именно —  $R$  и  $R'_1$

$$R'_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Тогда, начиная с точки  $A$ , действуя  $R'_1$  и  $R$ , получим решетку на всей окружности (рис. 3).

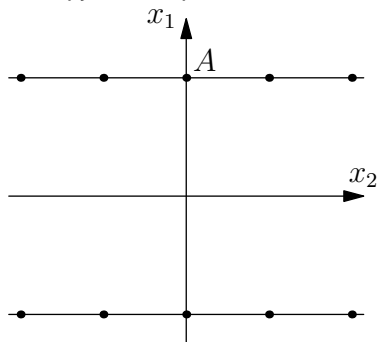


Рисунок 3. Решетка на окружности плоскости Галилея, полученная действием  $R'_1, R$ .

Figure 3. Lattice on a circle of the Galilean plane, obtained by the action of  $R'_1, R$ .

Все то же самое можно проделать и на гиперболической прямой ( $j = i$ ). В этом случае

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \text{ch } v & -\text{sh } v \\ \text{sh } v & -\text{ch } v \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$R_1^2 = R_2^2 = 1, \quad R_1 R_2 = R.$$

Образующая подгруппы «вращений»

$$R = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \text{ch } v & -\text{sh } v \\ -\text{sh } v & \text{ch } v \end{pmatrix},$$

$$R^n = \begin{pmatrix} \text{ch } nv & -\text{sh } nv \\ -\text{sh } nv & \text{ch } nv \end{pmatrix}.$$

Здесь мы имеем пример фуксовой группы, т.е. дискретной подгруппы группы движений гиперболической плоскости. Ее действие на окружности в пространстве Минковского изображено на рис. 4, 5.

Таким образом, дискретные подгруппы диэдра  $D_n$  группы  $O(2)$  при контракциях переходят в подгруппы диэдра  $D_\infty$  групп Галилея и Лоренца. Отметим, что группы  $D_\infty$  являются и группами симметрии пространственно-временных решеток на плоскостях Галилея и Минковского, изображенных на рис. 6 и 7.

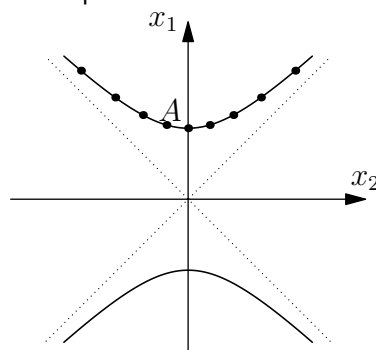


Рисунок 4. Решетка на окружности плоскости Минковского, полученная действием  $R_1, R_2$ .

Figure 4. Lattice on a circle in the Minkowski plane, obtained by the action of  $R_1, R_2$ .

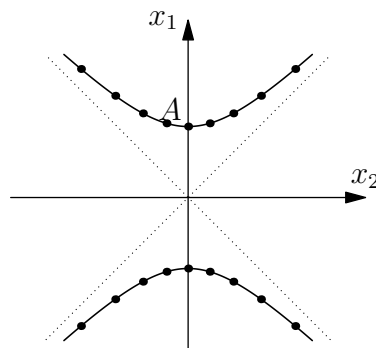


Рисунок 5. Решетка на окружности плоскости Минковского, полученная действием  $R'_1, R$ .

Figure 5. Lattice on a circle in the Minkowski plane, obtained by the action of  $R'_1, R$ .

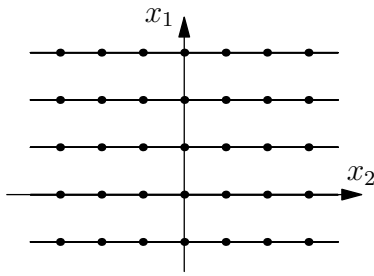


Рисунок 6. Пространственно-временная решетка на плоскости Галилея.  
Figure 6. Space-time lattice on the Galilean plane.

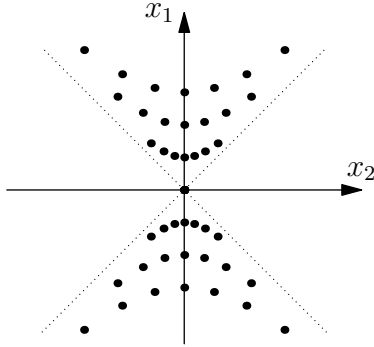


Рисунок 7. Пространственно-временная решетка на плоскости Минковского.  
Figure 7. Space-time lattice on the Minkowski plane.

Отметим, что все данные формулы можно было бы получить и с помощью комплексных, дуальных и двойных чисел [16]. Единным образом их можно записать в виде  $z = x_1 + jx_2$ , где  $j = i, \iota, e, e^2 = 1$ . Отражения  $R_1$  и  $R_2$  в этом случае действуют следующим образом

$$z' = R_1 \cdot z = \frac{a^2}{z}, \quad z' = R_2 \cdot z = \frac{a^2}{z} e^{\frac{2\pi}{n}j},$$

а вращения —

$$z' = R_1 R_2 \cdot z = R \cdot z = e^{\frac{2\pi}{n}j} z.$$

## 2. Группа диэдра $D_3$ как дискретная подгруппа группы $O(3)$

Правильные многоугольники и правильные многогранники могут быть вписаны в сферу, вследствие чего их группы симметрии будут дискретными подгруппами группы вращений  $O(3)$ .

Двумерные пространства Кэли-Клейна можно реализовать [14] как сферы  $S_2(j)$

$$x_1^2 + j_1^2 x_2^2 + j_1^1 j_2^2 x_3^2 = a^2, \quad j_k = 1, \iota_k, i \quad (10)$$

в пространствах  $\mathbf{R}_3(j_1, j_2) = (x_1, j_1 x_1, j_1 j_2 x_2)$  с метрикой  $ds^2 = dx_1^2 + j_1^2 dx_2^2 + j_1^2 j_2^2 dx_3^2$ . Здесь  $\iota_k^2 = 0, \iota_k \iota_p = \iota_p \iota_k \neq 0, k \neq p, k, p = 1, 2$ . Вращения относительно осей  $x_1, x_2$  и  $x_3$  описываются матрицами

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos j_2 \phi & -j_2 \sin j_2 \phi \\ 0 & \frac{1}{j_2} \sin j_2 \phi & \cos j_2 \phi \end{pmatrix},$$

$$R_{13} = \begin{pmatrix} \cos j_1 j_2 \phi & 0 & -j_1 j_2 \sin j_1 j_2 \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{j_1 j_2} \sin j_1 j_2 \phi & 0 & \cos j_1 j_2 \phi \end{pmatrix},$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} \cos j_1 \phi & -j_1 \sin j_1 \phi & 0 \\ \frac{1}{j_1} \sin j_1 \phi & \cos j_1 \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Рассмотрим простой пример группы симметрии правильного треугольника, расположенного в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}_3(1, 1)$ , как показано на рис. 8. Образующие этой группы, являющиеся отражениями относительно плоскостей  $x_1 = x_2$  и  $x_2 = x_3$ , имеют вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$R = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Произведение  $R = R_1 R_2$  является вращением на угол  $120^\circ$ . Определяющие соотношения

$$R_1^2 = 1, \quad R_2^2 = 1, \quad R^3 = 1. \quad (13)$$

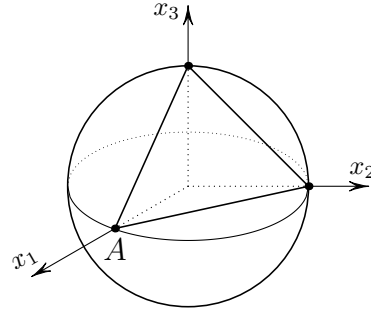


Рисунок 8. Положение правильного треугольника в евклидовом пространстве  $\mathbf{R}_3(1, 1)$ .  
Figure 8. Position of a regular triangle in the Euclidean space  $\mathbf{R}_3(1, 1)$ .

## 3. Группа симметрий правильного треугольника в пространствах Кэли-Клейна $\mathbf{R}_3(j_1, j_2)$

В расслоенном пространстве  $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$  с одномерной базой  $\{x_1\}$  и двумерным евклидовым слоем  $\{x_2, x_3\}$ , используя формулы (11), (12), находим вид образующих дискретной группы

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ v & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix},$$

$$R = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ v & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Определяющие соотношения

$$R_1^2 = 1, \quad R_2^2 = 1, \quad R^4 = 1 \quad (15)$$

задают группу симметрии квадрата (рис. 9). Начиная, например, с точки  $A$ , действуя всеми элементами этой группы, получим еще три точки, расположенные на плоскости  $x_1 = a$ , являющиеся вершинами правильного квадрата.

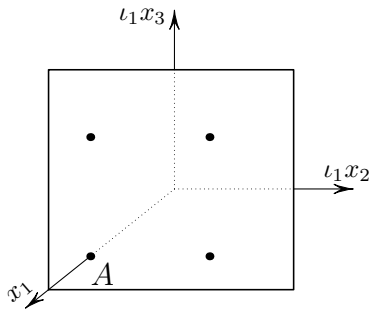


Рисунок 9. Квадрат в расслоенном пространстве  $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$  с одномерной базой  $\{x_1\}$  и двумерным слоем  $\{x_2, x_3\}$ , полученный действием  $R_1, R_2$ .

Figure 9. Square in the fibered space  $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$  with one-dimensional base  $\{x_1\}$  and two-dimensional fiber  $\{x_2, x_3\}$ , obtained by the action of  $R_1, R_2$ .

Действительно, матрицы  $R_1$  и  $R_2$  в рассмотренном случае определяют отражения относительно прямых  $x_2 = \frac{av}{2}$  и  $x_2 = x_3$  в двумерном слое  $\{x_2, x_3\}$  в точке базы  $x_1 = a$ . Эти прямые пересекаются под углом  $45^\circ$ , поэтому композиция двух отражений  $R_1$  и  $R_2$  даст поворот на  $90^\circ$ .

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ v & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} = TGT^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \frac{v}{2} & 1 & \cdot \\ \frac{v}{2} & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ -\frac{v}{2} & 1 & \cdot \\ -\frac{v}{2} & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \frac{v}{2} & 1 & \cdot \\ \frac{v}{2} & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

это операция сдвига в пространстве  $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$ . При этом все операторы преобразуются как  $TGT^{-1}$ . Таким образом, имеем в слое  $x_1 = a$  вращение на  $90^\circ$  с центром, смещенным в точку  $(a, av/2, av/2)$ .

Отметим, что если бы мы выбрали другое расположение правильного треугольника в пространстве  $\mathbf{R}_3(1, 1)$ , то получили бы иной результат, так как при этом в слое  $\{x_2, x_3\}$  в точке базы  $x_1 = a$  прямые, относительно которых происходят отражения, были бы расположены под другим углом. Если этот угол равен  $\frac{\pi}{n}$ , то получим группу диэдра  $D_n$ , для других значений углов получим группу симметрии  $D_\infty$ .

В дважды расслоенном пространстве  $\mathbf{R}_3(\iota_1, \iota_2)$ , в котором слой  $\{x_2, x_3\}$  в свою очередь расслоен с базой  $\{x_2\}$  и слоем  $\{x_3\}$ , образующие  $R_1, R_2$  из (12) принимают вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ v & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & w & -1 \end{pmatrix}.$$

Определяющие соотношения

$$R_1^2 = 1, \quad R_2^2 = 1. \quad (16)$$

Оператор "вращения"

$$R = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ v & -1 & \cdot \\ \cdot & w & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

порождает бесконечную подгруппу с элементами

$$R^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ nvw & -2nw & 1 \end{pmatrix},$$

$$R^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ v & -1 & \cdot \\ -nvw & 2nw & 1 \end{pmatrix}.$$

Действуя на точку  $A$  элементами указанной группы, задаваемой образующими  $R_1, R_2$  и соотношениями (16), получим решетку на окружности плоскости Галилея  $x_1 = a$  (рис. 10).

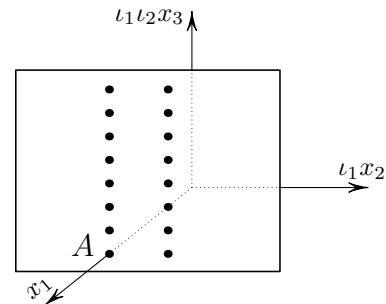


Рисунок 10. Решетка в дважды расслоенном пространстве  $\mathbf{R}_3(\iota_1, \iota_2)$ , полученная действием  $R_1, R_2$ .

Figure 10. Lattice in a doubly fibered space  $\mathbf{R}_3(\iota_1, \iota_2)$ , obtained by the action  $R_1, R_2$ .

В однократно расслоенном пространстве  $\mathbf{R}_3(1, \iota_2)$  с двумерной евклидовой базой  $\{x_1, x_2\}$  и одномерным слоем  $\{x_3\}$  образующие  $R_1, R_2$  из (12) принимают вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & v & -1 \end{pmatrix}.$$

Определяющие соотношения

$$R_1^2 = 1, \quad R_2^2 = 1. \quad (18)$$

Оператор "вращения"

$$R = R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & v & -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

порождает бесконечную подгруппу с элементами

$$R^{2n+1} = \begin{pmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ -nv & (n+1)v & -1 \end{pmatrix},$$

$$R^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ nv & -nv & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Действуя на точку  $A$  элементами всей группы, задаваемой образующими  $R_1, R_2$  и соотношениями (18), получим решетку на цилиндре  $x_1^2 + x_2^2 = a^2$  (рис. 11).

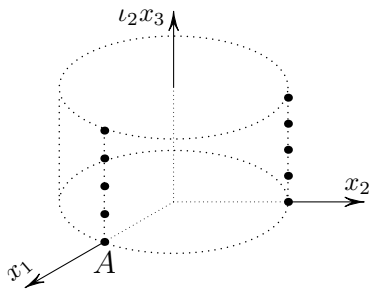


Рисунок 11. Решетка в однократно расслоенном пространстве  $\mathbf{R}_3(1, \iota_2)$  с двумерной евклидовой базой  $\{x_1, x_2\}$  и одномерным слоем  $\{x_3\}$ , полученная действием  $R_1, R_2$ .

Figure 11. Lattice in a singly fibered space  $\mathbf{R}_3(1, \iota_2)$  with two-dimensional Euclidean base  $\{x_1, x_2\}$  and one-dimensional fiber  $\{x_3\}$ , obtained by the action  $R_1, R_2$ .

#### 4. Группы симметрии правильных многогранников

Группу симметрии правильного  $n$ -угольника можно задать с помощью отражений относительно двух плоскостей, угол между которыми равен  $\frac{\pi}{n}$ . Схема Кокстера-Дынкина [8, 15] для этого случая представлена на рис. 12.



Рисунок 12. Диаграмма Кокстера-Дынкина для правильного  $n$ -угольника.  
Figure 12. Coxeter-Dynkin diagram for a regular  $n$ -gon.

Данные плоскости можно представить уравнениями

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \quad (21)$$

где  $a_{1j}$  и  $a_{2j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  задают два вектора, перпендикулярные этим плоскостям.

Правильные многогранники — тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр и икосаэдр, можно вписать в сферу, и их группы симметрии являются дискретными подгруппами группы  $O(3)$  [8, 15], элементы которых порождаются отражениями относительно трех плоскостей

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (22)$$

углы между которыми равны  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$  в случае тетраэдра,  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$  для куба и октаэдра и  $(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$  для икосаэдра и додекаэдра. Соответствующие диаграммы Кокстера-Дынкина представлены на рис. 13(a), 13(b) и 13(c).

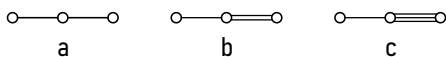


Рисунок 13. Диаграммы Кокстера-Дынкина для правильных многогранников.  
Figure 13. Coxeter-Dynkin diagram for regular polyhedrons.

#### 5. Пространство $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$

В пространстве  $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$  сфера радиуса  $a$  переходит в слой  $x_1 = a$ . Тогда, полагая в уравнениях (21) для двух плоскостей  $x_1 = a$ , получаем дискретную группу, порожденную отражениями относительно двух прямых

$$\sum_{j=2}^3 a_{ij}x_j + aa_{i1} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (23)$$

Предполагая  $a_{i2} \neq 0$ , можно переписать уравнения прямых (23) в виде

$$x_2 = k_i(x_3 - d_3) + d_2, \quad i = 1, 2, \quad (24)$$

здесь  $(d_2, d_3)$  — точка пересечения этих прямых,  $k_i = \operatorname{tg} \phi_i = -\frac{a_{i3}}{a_{i2}}$ . Тогда отражения  $R_1$  и  $R_2$  относительно указанных прямых задаются формулами

$$R_i = TO_iT^{-1}, \quad (25)$$

где операция сдвига

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ d_2 & 1 & \cdot \\ d_3 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

и отражения

$$O_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos 2\phi_i & \sin 2\phi_i \\ \cdot & \sin 2\phi_i & -\cos 2\phi_i \end{pmatrix}, \quad O_i^2 = 1.$$

Вращение, задаваемое композицией отражений  $R_1$  и  $R_2$ , имеет вид

$$R = R_1R_2 = TO_1O_2T^{-1}. \quad (26)$$

Если угол  $\phi_1 - \phi_2$  между этими прямыми равен  $\frac{\pi}{m}$ , то  $R^m = 1$ , и мы имеем конечную группу диэдра  $D_m$ . Таким образом, при контракции группа диэдра  $D_n$  может перейти при некоторых положениях правильного  $n$ -угольника, вписанного в сферу, в  $D_m$ .

Три плоскости (22), определяющие группы симметрий правильных многогранников, в слое  $x_1 = a$  задают дискретную группу, порожденную отражениями относительно трех прямых

$$\sum_{j=2}^3 a_{ij}x_j + aa_{i1} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Предполагая  $a_{i2} \neq 0$ , можно переписать уравнения прямых (27) в виде

$$x_2 = k_ix_3 + d_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (28)$$

здесь  $(d_i, 0)$  — точки пересечения этих прямых оси  $x_2$ ,  $k_i = \operatorname{tg} \phi_i = -\frac{a_{i3}}{a_{i2}}$ . Тогда три базовых отражения  $R_i$  относительно этих прямых задаются формулами

$$R_i = TO_iT^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (29)$$

где оператор сдвига теперь равен

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ d_i & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

а оператор отражения имеет прежний вид

$$O_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos 2\phi_i & \sin 2\phi_i \\ \cdot & \sin 2\phi_i & -\cos 2\phi_i \end{pmatrix}.$$

Каждая пара прямых определяет дискретную подгруппу поворотов, задаваемую композициями  $R_1R_2$ ,  $R_2R_3$  и  $R_1R_3$ . Чтобы эти подгруппы были конечными, разности углов между данными прямыми  $\Delta\phi_{12} = |\phi_1 - \phi_2|$ ,  $\Delta\phi_{23} = |\phi_2 - \phi_3|$  и  $\Delta\phi_{31} = |\phi_3 - \phi_1|$  должны быть равны  $\frac{\pi}{k_1}$ ,  $\frac{\pi}{k_2}$ ,  $\frac{\pi}{k_3}$  соответственно, где  $k_i \in \mathbb{N}$ . Имеем треугольник, образованный тремя прямыми с углами  $\frac{\pi}{k_i}$ . Так как сумма углов в треугольнике равна  $\pi$ , получаем уравнение на числа  $k_i$

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} = 1. \quad (30)$$

Оно имеет только три решения [8] в виде троек  $(3, 3, 3)$ ,  $(2, 4, 4)$  и  $(2, 3, 6)$ . Таким образом, если углы между этими прямыми равны  $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ ,  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  или  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ , то имеем дискретную группу, порождающую решетку на евклидовой плоскости в слое. Диаграммы Кокстера-Дынкина для этих групп представлены на рис. 14.

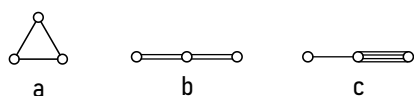


Рисунок 14. Диаграммы Кокстера-Дынкина для дискретных групп в пространстве  $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$ .

Figure 14. Coxeter-Dynkin diagrams for discrete groups in space  $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$ .

## 6. Пространство $\mathbf{R}_3(\iota_1, \iota_2)$

Если обе прямые (23) не лежат в слое  $x_2 = b$ , то уравнения (23) можно записать в виде

$$x_3 = v_i x_2 + d_i, \quad i = 1, 2. \quad (31)$$

Тогда отражения  $R_1$  и  $R_2$  относительно этих прямых задаются формулами

$$R_i = T_i P_i T_i^{-1}, \quad R_i^2 = 1, \quad (32)$$

где

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ d_i & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad P_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 2v_i & -1 \end{pmatrix}.$$

Вращение, задаваемое композицией отражений  $R_1$  и  $R_2$ , имеет вид

$$R = R_1 R_2 = T K T^{-1}, \quad R^n = T K^n T^{-1}, \quad (33)$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ d_1 - d_2 & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 2(v_1 - v_2) & 1 \end{pmatrix},$$

и определяет бесконечную циклическую группу, изоморфную  $\mathbb{Z}$ . Таким образом, в каждом слое  $x_2 = b$  будет своя решетка со своим шагом, представляющая орбиту группы диэдра  $D_\infty$ .

Если же одна из прямых, задающих отражение, совпадает со слоем  $x_2 = b$ , то у нас появляется еще отражение между слоями. Пример такой решетки изображен на рис. 10.

На плоскости Галилея есть прямые двух типов [17]. Первый тип — прямые вида  $x_3 = v x_2 + d$ , второй тип — прямые вида  $x_2 = b$ . Если обозначить светлым кружком зеркало в виде прямой первого типа, а темным кружком — зеркало, как прямую второго типа, то на плоскости Галилея можно определить три типа диаграмм Кокстера-Дынкина (рис. 15).

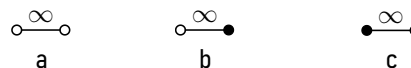


Рисунок 15. Диаграммы Кокстера-Дынкина для дискретных групп на плоскости Галилея.

Figure 15. Coxeter-Dynkin diagrams for discrete groups on the Galilean plane.

Первый и третий типы диаграмм определяют дискретные группы, орбитами которых являются решетки в слое и в базе соответственно. В случае симметрий платоновых тел, если пересечения трех плоскостей (22) со слоем  $x_1 = a$  имеют вид прямых первого типа (31), то три отражения  $R_i$  дискретной группы будут иметь вид (32). Каждая пара отражений задает решетку в слое со своим шагом.

## Заключение

Контракции непрерывных групп Ли, описанные в [14] с помощью коммутативных нильпотентных образующих  $\iota_k$ , допускают адекватное описание посредством непрерывных вещественных параметров  $\varepsilon_k$ , которые стремятся к своим нулевым предельным значениям  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ . Предельный переход в непрерывной группе влечет за собой переходы в соответствующих дискретных подгруппах и, соответственно, изменение орбит этих групп.

Отметим, что в случае контракций компактных групп Ли обычно получаются некомпактные группы. В наших примерах конечные дискретные группы переходят в бесконечные дискретные группы. В случае, когда при контракции исходной непрерывной группы имеется инвариантная компактная подгруппа, то соответствующая ей дискретная подгруппа остается конечной. Этот пример возникает при контракции в пространстве  $\mathbf{R}_3(\iota_1, 1)$ .

Авторы выражают благодарность Н.А. Громову за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

## Литература

1. Сарданашвили, Г.А. Калибровочные поля в случае дискретных симметрий / Г.А. Сарданашвили // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. – 1981. – Т. 22. – № 5. – С. 41–44.
2. Grimus, W. Finite flavour groups of fermions / W. Grimus, P.O. Ludl // J. Phys. A: Math. Theor. – 2012. – Vol. 45. – № 23. – 233001. ArXiv:1110.6376 [hep-th].
3. King, S.F. Spontaneous breaking of  $SO(3)$  to finite family symmetries with supersymmetry – an  $A_4$  model / S.F. King, Y.L. Zhou // J. High Energy Phys. – 2018. – № 11. – P. 173. ArXiv:1809.10292 [hep-ph].
4. Luhn, C. Spontaneous breaking of  $SU(3)$  to finite family

- symmetries – a pedestrian's approach / C. Luhn // J. High Energ. Phys. – 2011. – P. 108. ArXiv:1101.2417 [hep-ph].
5. Rachlin, B.L. Spontaneous breaking of gauge groups to discrete symmetries / B.L. Rachlin, T.W. Kephart // J. High Energ. Phys. – 2017. – P. 110. ArXiv:1702.08073 [hep-ph].
  6. Wilson, R.A. Integer versions of Yang-Mills theory / R.A. Wilson // ArXiv:2202.08263 [math.GR].
  7. Зельдович, Я.Б. Космологические следствия спонтанного нарушения дискретной симметрии / Я.Б. Зельдович, И.Ю. Кобзарев, Л.Б. Окунь // ЖЭТФ. – 1974. – Т. 67. – С. 3–11.
  8. Винберг, Э.Б. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны / Э.Б. Винберг, О.В. Шварцман // Геометрия-2. Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. – Москва: ВИНТИ, 1988. – Т. 29. – С. 147–259.
  9. Галиулин, Р.В. Двумерные дискретные группы с конечной фундаментальной областью, их физический и гуманитарный смыслы / Р.В. Галиулин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2005. – Т. 45. – № 8. – С. 1331–1344.
  10. Галиулин, Р.В. Кристаллографическая картина мира / Р.В. Галиулин // УФН. – 2002. – Т. 172, вып. 2. – С. 229–233.
  11. Тараканов, А.Н. О дискретных подгруппах группы Лоренца, генерирующих решетки в пространстве Минковского / А.Н. Тараканов // Весци НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 4. – С. 5–9.
  12. Dirac, P.A.M. Discrete subgroups of the Poincare group / P.A.M. Dirac // Проблемы теоретической физики. Памяти И.Е. Тамма. Москва: Наука, 1972. – С. 45–51.
  13. Белавин, А.А. Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем / А.А. Белавин // Функцион. анализ и его прил. – 1980. – Т. 14, вып. 4. – С. 18–26.
  14. Громов, Н.А. Контракции классических и квантовых групп / Н.А. Громов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 318 с.
  15. Коксетер, Г.С.М. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г.С.М. Коксетер, У.О.Дж. Мозер. – Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. литер., 1980. – 240 с.
  16. Яглом, И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И.М. Яглом. – Москва: Физматгиз, 1963. – 192 с.
  17. Пименов, Р.И. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени) / Р.И. Пименов. – Ленинград: Наука, 1968. – 496 с.
  4. Luhn, C. Spontaneous breaking of SU(3) to finite family symmetries – a pedestrian's approach / C. Luhn // J. High Energ. Phys. – 2011. – P. 108. ArXiv:1101.2417 [hep-ph].
  5. Rachlin, B.L. Spontaneous breaking of gauge groups to discrete symmetries / B.L. Rachlin, T.W. Kephart // J. High Energ. Phys. – 2017. – P. 110. ArXiv:1702.08073 [hep-ph].
  6. Wilson, R.A. Integer versions of Yang-Mills theory / R.A. Wilson // ArXiv:2202.08263 [math.GR].
  7. Zeldovich, Ya.B. Cosmological consequences of a spontaneous breakdown of a discrete symmetry / Ya.B. Zeldovich, I.Yu. Kobsarev, L.B. Okun // JETP. – 1975. – Vol. 40. – № 1. – P. 1–5.
  8. Vinberg, E.B. Diskretnye gruppy dvizhenij prostranstv postojannoju krivizny [Discrete groups of motions of spaces of constant curvature] / E.B. Vinberg, O.V. Schwarzman // Geometrija-2. Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovrem. probl. mat. Fund. napr. [Geometry-2. Science and technology findings. Ser. Modern problems of mathematics. Fundamental directions]. – Moscow: VINITI, 1988. – Vol. 29. – P. 147–259.
  9. Galiulin, R.V. Dvumernye diskretnye gruppy s konechnoj fundamental'noj oblast'ju, ih fizicheskiy i humanitarnyj smysly [Two-dimensional discrete groups with finite fundamental regions and their physical and humanitarian interpretations] / R.V. Galiulin // Zh. vychisl. mat. mat. fiz. [Computational mathematics and mathematical physics]. – 2005. – Vol. 45. – № 8. – P. 1331–1344.
  10. Galiulin, R.V. Crystallographic picture of the world / R.V. Galiulin // Physics-Uspexhi. – 2002. – Vol. 45. – № 2. – P. 221–225.
  11. Tarakanov, A.N. O diskretnyh podgruppah gruppy Lorentsa, generirujushchih reshetki v prostranstve Minkovskogo [Discrete subgroups of the Lorentz group generating lattices in the Minkowski space] / A.N. Tarakanov // Vesci NAN Belarusi. Ser. fiz.-mat. navuk [Proc. NAS of Belarus. Phys. and math. ser.]. – 2014. – № 4. – P. 5–9.
  12. Dirac, P.A.M. Discrete subgroups of the Poincare group / P.A.M. Dirac // Problemy teoreticheskoy fiziki. Pamjati I.E. Tamma. [Problems of theoretical physics. Memorial volume to I.E. Tamm]. – Moscow: Nauka, 1972. – P. 45–51.
  13. Belavin, A.A. Discrete groups and the integrability of quantum systems / A.A. Belavin // Funct. Anal. Appl. [Functional Analysis and Its Applications]. – 1980. – Vol. 14. – № 4. – P. 260–267.
  14. Gromov, N.A. Kontraktsii klassicheskikh i kvantovykh grupp [Contractions of classical and quantum groups] / N.A. Gromov – Moscow: FIZMATHLIT, 2012. – 318 p.
  15. Coxeter, H.S.M. Generators and relations for discrete groups / H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moser. – Springer-Verlag. 1980. – 169 p.
  16. Yaglom, I.M. Complex numbers in geometry / I.M. Yaglom. – New York, London: Academic Press, 1968. – 256 p.
  17. Pimenov, R.I. Kinematic Spaces: Mathematical Theory of Space-Time / R.I. Pimenov. – New York: Consultants Bureau, 1970. – 185 p. Nauchn. Sem. LOMI, V. 6, Nauka, Leningrad. Otdel., Leningrad, 1968. – P. 7–496.

## References

1. Sardanashvili, G.A. Kalibrovochnye polya v sluchae diskretnyh simmetrij [Gauge fields in the case of discrete symmetries] / G.A. Sardanashvili // Vestnik MGU. Ser. 3. Fizika. Astronomiya [Moscow University Physics Bulletin]. – 1981. – Vol. 22. – № 5. – P. 41–44.
2. Grimus, W. Finite flavour groups of fermions / W. Grimus, P.O. Ludl // J. Phys. A: Math. Theor. – 2012. – Vol. 45. – № 23. – 233001. ArXiv:1110.6376 [hep-th].
3. King, S.F. Spontaneous breaking of  $SO(3)$  to finite family symmetries with supersymmetry – an  $A_4$  model / S.F. King, Y.L. Zhou // J. High Energ. Phys. – 2018. – № 11. – P. 173. ArXiv:1809.10292 [hep-ph].



**Для цитирования:**

Костяков, И.В. Об одной контракции дискретной группы  $D_3$  / И.В. Костяков, В.В. Куратов // Известия Коми научного центра Уральского отделения Российской академии наук. Серия «Физико-математические науки». – 2022. – № 5 (57). – С. 42–50. УДК: 530.145, 512.81. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-42-50

**For citation:**

Kostyakov, I.V. On one contraction of a discrete group  $D_3$  / I.V. Kostyakov, V.V. Kuratov // Proceedings of the Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences. Series "Physical and Mathematical Sciences". – 2022. – № 5 (57). – P. 42–50. UDC: 530.145, 512.81. DOI: 10.19110/1994-5655-2022-5-42-50

Дата поступления рукописи: 25.08.2022

Received: 25.08.2022