300 лет Российской академии наук
300 years of Russian Academy of Sciences

УДК 548.12 DOI:10.19110/geov.2024.1.5

Из опыта преподавания. XIII. Имя кристаллического полиэдра. К 130-летию со дня рождения А. Ф. Лосева и 100-летию «Философии имени»

Ю. Л. Войтеховский

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
Российское минералогическое общество, Санкт-Петербург
vojtehovskijj@herzen.spb.ru

Статья приурочена к 130-летию со дня рождения выдающегося российского философа А. Ф. Лосева (1893—1988) и 100-летию его работы «Философия имени». В русле его идей в статье рассмотрена номенклатура полиэдрических кристаллических простых форм, разработанная научной школой «Федоровского института» под руководством А. К. Болдырева в стенах Ленинградского горного института. Предложен общий алгоритмический подход к номенклатуре выпуклых полиэдров, удобный для компьютерной обработки данных. Он открывает обширную исследовательскую программу на границе комбинаторной теории выпуклых полиэдров, линейной алгебры и теории чисел. Цель статьи — совершенствование преподавания кристаллографии в российских университетах и расширение кругозора обучающихся в смежных областях знания.

Ключевые слова: *А. Ф. Лосев, «Философия имени», выпуклый полиэдр, кристаллический полиэдр, полиэдрическая простая форма, матрица смежности, бинарный код, десятичный код, имя выпуклого полиэдра.*

From teaching experience. XIII. Name of crystal polyhedron. On the occasion of the 130th anniversary of A. F. Losev's birth and the 100th anniversary of the «Philosophy of the Name»

Yu. L. Voytekhovsky

A. I. Herzen Russian State Pedagogical University,
Russian Mineralogical Society, Saint Petersburg

The article is timed to the 130th anniversary of the birth of the outstanding Russian philosopher A. F. Losev (1893—1988) and the 100th anniversary of his work «The Philosophy of Name». Against the background of his ideas, the article considers the nomenclature of polyhedral crystalline simple forms, developed by the scientific school of the «Fedorov Institute» under the leadership of A. K. Boldyrev in the walls of the Leningrad Mining Institute. A general algorithmic approach to the nomenclature of convex polyhedra, convenient for computer data processing, is proposed. It opens an extensive research programme on the frontier of combinatorial theory of convex polyhedra, linear algebra and number theory. The aim of the article is to improve the teaching of crystallography in Russian universities and to broaden the outlook of students in related fields of knowledge.

Keywords: *A. F. Losev, «Philosophy of Name», convex polyhedron, crystalline polyhedron, polyhedral simple form, adjacency matrix, binary code, decimal code, name of convex polyhedron.*

Философия почти ушла из естественных наук, которые, углубляясь в свои предметы, разбегаются, подобно галактикам. Перевод нашей российской степени «к. г.-м. н.» в английскую Ph. D., то есть Philosophy Degree, уже смотрится пережитком и даже курьезом. А ведь философия весьма способствует междисциплинарному взгляду на проблемы. Как следует называть вещь, например кристаллический полиэдр? Как, поиграв вариантами и изобретя синонимы, их в итоге сохраняет язык? Должно ли имя лишь указывать на предмет или содержать в архивированном виде его конструктивное определение? Что позволяет сохранять «по инерции» имя вещи, радикально изменившейся в ходе непрерывной эволюции?[1] Взятая во всей полноте, тема обращает нас к долгой философской традиции, в которой верстовыми столбами стоят имена Г. Фреге, Б. Рассела, П. Стросона, Дж. Серла, Дж. Берджеса, С. Крипке, Л. Витгенштейна, С. Коэна и других, в том

[1] Автора этих строк не узнать на фото в 1 год, а имя — то же. Что роднит эти два лица? Философская проблема налицо!

Для цитирования: Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. XIII. Имя кристаллического полиэдра. К 130-летию со дня рождения А. Ф. Лосева и 100-летию «Философии имени» // Вестник геонаук. 2024. 1 (349). С. 43—49. DOI: 10.19110/geov.2024.1.5

For citation: Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. XIII. Name of crystal polyhedron. On the occasion of the 130th anniversary of A. F. Losev's birth and the 100th anniversary of the «Philosophy of the Name». Vestnik of Geosciences, 2024, 1 (349), pp. 43—49, doi: 10.19110/geov.2024.1.5

Рис. 1. А. Ф. Лосев и его книги (одно из последних фото)
Fig. 1. A. F. Losev and his books (one of the last photos)

числе российского философа А. Ф. Лосева (1893—1988)[2] (рис. 1). Далее коротко рассмотрены его идеи, впервые изложенные в «Философии имени» в 1923 г., а в их русле — номенклатура выпуклых полиэдров вообще и полиэдрических кристаллических простых форм в частности. Педагогический момент очевиден: студентам интересно, когда специальный предмет вдруг утопает в мировоззренческой проблеме *sub specie aeternitatis*, а в пограничных областях обнаруживаются новые пути для исследования.

«Философия имени»

Не надо думать, что А. Ф. Лосев, «российский Платон» и «Платон XX века», сразу умчит нас в идеальные абстракции. В силу обстоятельств своей жизни он прекрасно понимал, что такое эмпирические факты и обобщения. Это близко кристаллографам и минералогам. Эмпирические обобщения — научное кредо столь крупного естествоиспытателя, как В. И. Вернадский. Но здесь дело в другом. «Надо отдать эмпирии всякую дань, которую она только заслуживает, но надо отдать дань и теории, какую последняя только заслуживает. Диалектика есть и абсолютный эмпиризм, и абсолютный рационализм, и истину её вы поймёте именно только тогда, когда возьмёте эти два противоречивых утверждения синтетически, как нечто одно. В этом и только в этом и заключается жизненность диалектики» (Лосев, 2009, с. 94).

Разбору всех аспектов книги «Философия имени» посвящено много текстов. Для дальнейшего нам важно знать мнение философа об имени вещи. «Слово, и в частности имя, есть необходимый результат мысли, и только в нём мысль достигает своего высшего напряжения и значения. <…> Без слова и имени нет вообще разумного бытия, разумного проявления бытия, разумной встречи с бытием» (Там же, с. 96). С этой платформой нельзя не согласиться. Но что предлагается? Если коротко, то А. Ф. Лосев снимает со слова слой за слоем, пока не доберется до сути, которую называет идеей.

1-й слой — «фонема, звуковая оболочка слова» (с. 100), 2-й — «семема, сфера слова, обладающая значением» (с. 102), 3-й — «ноэма, т. е. то, что мыслится в слове» (с. 106), 4-й — «идея, такой момент в слове, который исключает не только индивидуальную, но и всякую другую инаковость понимания и который говорит о полной адеквации понимания и понимаемого <…> арена встречи адекватного понимания с адекватно понимаемым <…> арена полного формулирования смысла в слове» (с. 116); «идея предмета и есть самый предмет целиком, но перенесённый в инобытие» (с. 122); «тут полное и абсолютное не единство и сходство, но тождество со своим инобытием» (с. 123). Но возможна ли номенклатура выпуклых полиэдров, не содержащая информационного шума, чтобы имя отсылало к форме без метафор, алгоритмически распаковывалось и давало все свойства полиэдра, различимые визуально?

Выпуклые полиэдры

С их именованием дело обстоит из рук вон плохо. Само слово «полиэдр», т. е. многогранник, — условность, т. к. одновременно он многовершинник и многореберник. В истории минералогии (зарождавшейся кристаллографии) проблемой именования форм кристаллов занимался Ж. Б. Л. Роме-де-Лиль во второй половине XVIII века. Числа граней (F), ребер (E) и вершин (V) связаны фундаментальной теоремой Эйлера: $F - E + V = 2$, говорящей важное о 3D-евклидовом пространстве. Дуальным переходом многогранники превращаются в «столько-же-вершинники» и *vice versa* при

[2] У нашего поколения в студенчестве его имя было легендарным. Арестован в 1930 г. за книгу «Диалектика мифа», в которой отверг марксизм. Осужден на 10 лет исправительно-трудовых лагерей, строил Беломорско-Балтийский канал, где потерял зрение. На вопрос: «Остались ли в СССР философы-идеалисты?» — И. В. Сталин якобы получил ответ: «Есть один, А. Ф. Лосев». Вождь мудро решил: «Один пусть будет»... По просьбе жены А. М. Горького освобожден в 1933. Более 40 лет преподавал в Московском государственном педагогическом институте. По слухам, ради него студенты переводились из МГУ в МГПИ. Реабилитирован посмертно в 1994 г., к 100-летию со дня рождения.

сохранении числа ребер и симметрии… Впрочем, из имени «тетраэдр» можно извлечь, что он такой один, его 4 грани — треугольники, сходящиеся по 3 в каждой из 4 вершин, ребер — 6. Этим в комбинаторном смысле все сказано. А вот дальше — беда…

Хорош ли термин «пентаэдр»? Плох, ведь их два — тетрагональная пирамида и тригональная призма с пинакоидом, но эти составные имена требуют цепочки предварительных определений. А «гексаэдр»? Еще хуже, ведь их уже семь. Под «гексаэдром» мы обычно понимаем самый симметричный из них — «куб». Это имя ужасно, ибо не содержит вообще никакой информации о форме, апеллируя к рефлексу, выработанному с детства. Таков же и «октаэдр» — самый симметричный из 257, дуальный к «кубу». По Е. С. Федорову, «кристаллы блещут симметрией». Симметричные формы издавна нравились математикам. С древности и до сего дня классическими объектами изучения в геометрии и алгебре (теории групп) стали многообразия правильных полиэдров Платона и полуправильных (в разных смыслах) — Архимеда, Каталани и Залгаллера-Джонсона.

О выпуклых полиэдрах писали и доказывали теоремы многие. Укажем авторов, которые занимались именно систематическим перечислением их комбинаторных типов (подразумевающих определенный набор граней и способ их соединения без учета площадей и углов). Дело было начато работой Kirkman (1862/1863), где описаны (без рисунков) все 4- … 8-эдры, дуальные им 4- … 8-вершинники и 9-эдры с числом ребер менее 17. Затем Е. С. Федоров (1893) с помощью своего алгоритма нашел и изобразил все 4- … 7-, а также простые (в каждой вершине сходятся ровно 3 ребра) 8- и 9-эдры. Он не знал предыдущей работы. Это видно из того, что число 7-эдров у него другое, и это не обсуждается. В статье (Hermes, 1899) нарисованы, тоже независимо, все 4-…8-эдры, в книге (Brückner, 1900) — простые 4-…10-эдры, в серии статей (Bouwkamp, 1946) — полиэдры с числом ребер до 14. Этим завершился период рисования.

Прошло немало лет, прежде чем математики вернулись к проблеме, но уже с компьютерами. В диссертации (Grace, 1965) найдены все простые 4-…11-эдры, в статье (Bowen, Fisk, 1967) — все 4-…12-вершинные триангуляции на сфере и тем самым — дуальные простые 4-…12-эдры. В статье (Britton, Dunitz, 1973) изображены все 4-…8-вершинники, в статьях (Federico, 1969, 1975) — дуальные к ним 4-…8- и все 9-эдры. Число всех 10-эдров впервые указано в статье (Duijvestijn, Federico, 1981), там же дана статистика полиэдров с различными порядками групп автоморфизмов (п. г. а.). П. Энгель с помощью компьютерного варианта федоровского алгоритма нашел все 11-, 12- и простые 13-эдры (Engel, 1982, 1994) и дал самую полную на тот момент статистику простых 4-…15-эдров по п. г. а. (Engel, 2002).

Авторами статей (Voytekhovsky, 2001a, 2001b; Voytekhovsky, Stepenshchikov, 2002a, 2002b, 2003a, 2003b, 2005, 2006) с помощью оригинального компьютерного алгоритма проверены данные о комбинаторных типах и точечных группах симметрии (т. г. с.) всех 4-…12- и простых 13-…16-эдров, устранены ошибки, даны изображения всех 4-…8- и простых 9-…12-эдров, при этом т. г. с. простых 13-…16-эдров найдены впервые. Заметим, что т. г. с. характеризуют полиэдры гораздо точнее, чем п. г. а. (Так, т. г. с. C, P и L_2 имеют п. г. а. 2.) Самая полная на сегодня статистика выпуклых полиэдров, охарактеризованных т. г. с., дана в табл. 1. (Число полиэдрических графов рассчитано гораздо дальше, но без п. г. а., и тем более без т. г. с. изоморфных им выпуклых полиэдров.) Каталоги их проекций Шлегеля (на одну из граней) и т. г. с. (Войтеховский, Степенщиков, 2008а, 2008б) доступны на сайте Геологического института ФИЦ КНЦ РАН.

Из сказанного выше видно, что каждый автор, как правило, повторял работу предшественников своим способом, удостоверяясь в правильности результата или исправляя ошибки. Это неизбежно уже потому, что почти все известные алгоритмы рекуррентные, то есть (n+1)-гранники находятся не иначе как из n-гранников. В рутинном переборе вариантов ошибки были даже у Е. С. Федорова (1893) с его уникальным пространственным воображением. П. Энгель указал: «два типа, IV’’’11 и IV’’’12, и два типа энантиоморфных пар, VI 46/47 и VI 55/56, соответственно изоморфны» (Engel, 1994, с. 23). Е. С. Федоров завысил число 7-эдров 3-й степени частности и простых 9-эдров на 1. Полиэдр IV’’’11 отнесен им к дитригонально-пирамидальной (*3m*), IV’’’12

Таблица 1. Число комбинаторных типов выпуклых полиэдров

Table 1. Number of combinatorial types of convex polyhedra

↓F, V→	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22	24	26	28
4	1																				
5		1	1																		
6		1	2	2	2																
7			2	8	11	8	5														
8			2	11	42	74	76	38	14												
9				8	74	296	633	768	558	219	50										
10				5	76	633	2635	6134	8822	7916	4442	1404	233								
11					38	768	6134	25626	64439	104213	112082	79773	36528	9714	1249						
12					14	558	8822	64439	268394	709302	1263032	1556952	1338853	789749	306470	70454	7595				
13																		49566			
14																			339722		
15																				2406841	
16																					17490241

— к гемипризматической безосной (диэдрической безосной, *m*) т. г. с. Но это один и тот же полиэдр с т. г. с. *3m* в проекции Шлегеля на две различные грани. Во втором случае обе энантиоморфные пары верно отнесены им к гемипинакоидальной (моноэдрической, *1*) т. г. с. Но это одна и та же пара 9-эдров. Заметим, что и П. Энгель в указании ошибки Е. С. Федорова допустил неточность. Полиэдр VI 46 изоморфен VI 56, а VI 47 изоморфен VI 55. Нами обнаружена еще одна ошибка Е. С. Федорова. Полиэдр VI 44 отнесен им к гемипризматической безосной т. г. с. (*m*). Но его следует относить к т. г. с. *3m*. Из этих примеров ясно, что вывод комбинаторных типов полиэдров и их симметрийный анализ требуют большой тщательности и должны повторяться разными авторами разными методами.

К табл. 1 сделаем три примечания. 1. В силу дуальности выпуклых полиэдров она симметрична относительно диагонали F = V и достраивается вниз. На диагонали расположены автодуальные «пирамидальные» классы полиэдров. Не лишен интереса вопрос: какие еще автодуальные полиэдры (кроме пирамид) реализуемы в кристаллографических т. г. с.? 2. Неоднократно отмечалось (автором и другими), что минеральные полиэдры обычно диссимметризованы. Из-за смещения граней вдоль нормалей вершины с кратностью более 3 растянуты в несколько простых вершин, соединенных ребрами. В табл. 1 простые полиэдры находятся в последней клетке каждой строки (V = 2F – 4), их разнообразие огромно. Сюда же попадают и минеральные зерна горных пород, если их рассмотреть в комбинаторном приближении (без геометрии контактов). 3. Табл. 1 показывает, что кристаллические полиэдры (простые формы и их обычно несложные комбинации) — весьма малый островок в океане выпуклых полиэдров.

Возвращаясь к проблеме именования полиэдров, заметим, что теория симметрии в этом не спасает. С ростом n доля комбинаторно-асимметричных (не приводимых к симметричному виду никакой непрерывной деформацией) выпуклых n-эдров стремится к 100 %: все 4-…6-эдры (их 1, 2, 7) симметричны, из 7-эдров (34) асимметричны 7 (20.588 %), из 8-эдров (257) — 140 (54.475 %), из 9-эдров (2606) — 2111 (81.005 %), из 10-эдров (32300) — 30014 (92.923 %), из 11-эдров (440564) — 430494 (97.714 %), из 12-эдров (6384634) — 6336013 (99.238 %), из простых[3] 13-эдров (49566) — 47030 (94.884 %), из 14-эдров (339722) — 331796 (97.667 %), из 15-эдров (2406841) — 2382352 (98.983 %), из 16-эдров (17490241) — 17411448 (99.550 %). Уже поэтому нужен способ именования комбинаторно асимметричных выпуклых полиэдров, преобладающих довлеющим образом. Все они, а значит почти все выпуклые полиэдры (ввиду исчезающе малой доли симметричных) безымянные! Статистика по всем т. г. с. дана в монографиях (Войтеховский, Степенщиков, 2008а, 2008б).

Полиэдрические простые формы

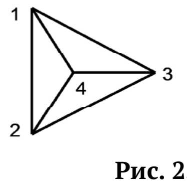
Отдадим должное номенклатуре кристаллических простых форм, разработанной научной школой «Федоровского института» под руководством А. К. Болдырева в стенах Ленинградского горного института (Boldyrev, 1925, 1936; Шафрановский и др., 1959; Войтеховский, 2021). Она удобна и принята в большинстве стран. Тогда «чего же боле»? Для примера рассмотрим серию простых форм, производных от тетраэдра: тригон-, тетрагон-, пентагонтритетраэдр и гексатетраэдр. Первые три конструируются однотипно — над гранями тетраэдра достраиваются пирамидки из тригонов, тетрагонов и пентагонов, всегда по 3. В четвертом случае — тоже из тригонов, но их 6. Полное имя формы — тригонгексатетраэдр. Тетрагона и пентагона здесь быть не может (неочевидно, но известно), поэтому и «тригон» не указан, но подразумевается. Тут видна попытка классиков упростить номенклатуру. Схема рациональна и стартует от тетраэдра, который единственный. Но все хуже для серий, производных от гексаэдра и октаэдра, которые не единственны и сами требуют определения. Далее предлагается логическая схема именования выпуклых полиэдров на основе их первых свойств.

Алгоритм именования

«Свойство есть то, что никак отделить иль отнять невозможно / Без разрушенья того, чему оно будет присуще: / Вес у камней, у огня теплота, у воды ее влажность…» (Лукреций, 2006, с. 41, строки 451—453). У выпуклого полиэдра в комбинаторном приближении — его реберный граф, который трехсвязен и планарен, то есть может быть изображен на плоскости без самопересечений (в проекции Шлегеля на одну из граней). Рассмотрим на примере тетраэдра следующий алгоритм (рис. 2).

1. Нумеруем вершины в произвольном порядке (у тетраэдра все нумерации эквивалентны из-за малого числа вершин и высокой симметрии). 2. Построим матрицу смежности 4 × 4: на пересечении i-й строки и j-го столбца ставим 1, если i-я и j-я вершины соединены ребром, иначе — 0. 3. Она симметрична, т. к. симметрично логическое отношение смежности вершин. Сохраняем верхний (или нижний) треугольник. 4. Выписываем построчно бинарный код и преобразуем его в десятичный: $111111 = 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0 \rightarrow 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 63$ — это и есть имя тетраэдра[4]. Обратным ходом восстанавливается реберный граф, далее действует теорема: полиэдрический граф расправляется в полиэдр, т. г. с. которого изоморфна группе автоморфизмов графа (Mani, 1971).

Заметим, что в алгоритме полиэдр предстает как поливершинник. Матрица смежности весьма информативна: ее порядок — число вершин (4), число единиц в верхнем (или нижнем) треугольнике — число ребер (6),



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Построение имени тетраэдра

Fig. 2. Constructing the name of a tetrahedron

[3] У простых полиэдров все вершины 3-валентные (простые).

[4] Пифагор принес богам гекатомбу в честь открытия теоремы, носящей его имя. Полагаем, открытие числового имени тетраэдра (символа огня) пифагорейцы оценили бы высоко.

число граней находим по теореме Эйлера (4), п. г. а. графа — число парных перестановок строк и столбцов, сохраняющих матрицу смежности (4! = 24); более тонким анализом можно показать, что это именно т. г. с. — 43m.

Примеры

Для полиэдра с большим числом вершин при различных нумерациях получаются различные матрицы смежности и имена. Для 5-вершинников возможны 5! = 120 нумераций. Но число имен зависит от т. г. с. Так, тетрагональная пирамида имеет т. г. с. 4 mm, п. г. а. — 8. Поэтому число имён 120 / 8 = 15 (рис. 3). Для 3-гональной бипирамиды (второй 5-вершинник, т. г. с. –6m2, п. г. а. 12) число имён 120 / 12 = 10. Правило обобщается: у n-вершинника число имен равно n! / p, где p — его п. г. а.

Итак, лишь для тетраэдра (т. г. с. –43m, п. г. а. 24) получим 4! / 24 = 1 — одно имя. Для октаэдра 6! / 48 = = 15, для куба 8! / 48 = 840 и т. д. Любое имя определяет полиэдр строго и шума не содержит. Но имеет место синонимия, ее причина ясна и логична. Разные нумерации вершин — это взгляд в другом ракурсе. Если вид иной, то и имя иное. Какое выбрать? Пожалуй, удобно минимальное (507 на рис. 3). Минимальное и максимальное имена обычно находятся несложными рассуждениями. Для октаэдра это 16341 и 31583. Предлагаем читателю найти их для куба[5].

Из общего правила следует, что у комбинаторно асимметричных n-вершинников (p = 1) число имён равно n! Результат эвристичен, т. к. выражает асимметричность полиэдра не как отрицание симметричности, а содержательно — через число вершин и матрицу смежности. Асимметричные полиэдры факториальны (их довлеющее большинство, они заслуживают имени без «а»), симметричные — афакториальны. Число имён — новый показатель симметричности: при данном n чем больше имён — тем ниже симметрия.

Имена на числовой прямой

Коль скоро рассуждение перешло в область теории чисел, интересно выяснить, как имена полиэдров распределены на числовой прямой. Для 4-...7-вершинников это выглядит так: [63], [507, 1022], [7915, 32754], [241483, 2096914]. Диапазоны имен n- и (n+1)-вершинников никогда не перекрываются. Пусть max_n — максимальное имя среди n-вершинников, min_{n+1} — минимальное имя среди (n+1)-вершинников. Первое не превосходит имени, составленного из единиц, заполняющих верхний треугольник матрицы смежности n × n (совпадает только для тетраэдра). Но в каждой вершине полиэдра сходятся не менее трёх рёбер. Поэтому в верхней строке матрицы смежности (n+1) × (n+1) любого (n+1)-вершинника (т. е. в области более высоких рязрядов двоичного кода) не менее трех единиц. Хватило бы и одной, чтобы имело место неравенство: $max_n < min_{n+1}$.

Есть и более тонкие утверждения: min_n всегда принадлежит пирамиде (рис. 4), max_n — полиэдру, «склеенному» из тетраэдров вдоль общего ребра (рис. 5), то и другое — при специальной нумерации вершин (Voytekhovsky, 2017a). Оба ряда полиэдров начинаются с тетраэдра, т. к. он тоже пирамида. Есть и неожиданное применение результата: если натуральное число попадает в зазор между указанными выше интервалами, то это не имя полиэдрического графа.

Как ведёт себя многообразие имен полиэдров при неограниченном росте числа вершин? Его удалось обуздать теоремами, связывающими границы соседних интервалов: $min_{n+1} / max_n \to 7$, $max_{n+1} / max_n \approx 2^n$, $min_{n+1} / min_n \approx 2^{n-1} + 11/7$, $max_n/min_n \approx 2^{n-1}/7$ (Voytekhovsky, 2017b). Соотношения легко интерпретируются в логарифмической шкале. Интервалы [lg min_n, lg max_n] монотонно растут, зазоры между ними быстро стремятся к lg 7 = 0.845 (рис. 6). Здесь есть порядок, но найденная асимптота требует объяснения!

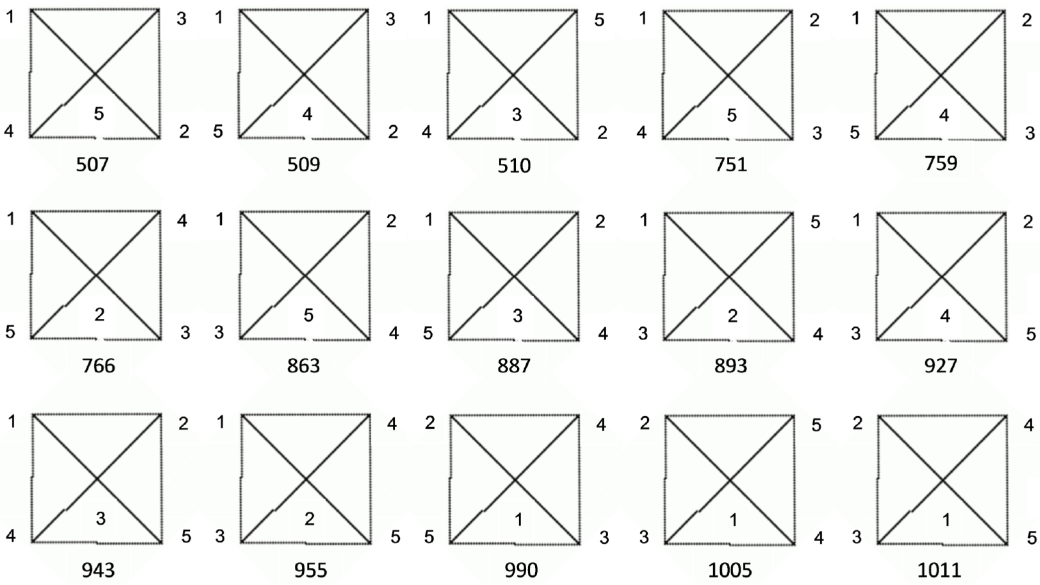


Рис. 3. Имена тетрагональной пирамиды

Fig. 3. Names of the tetragonal pyramid

[5] Кажется, только что родился новый тип занимательной задачи: для данного выпуклого полиэдра найти минимальное и максимальное имена и соответствующие нумерации вершин. Это не менее интересно, чем решать кроссворды.

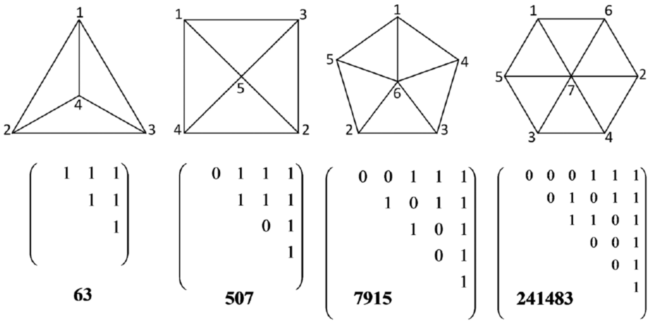


Рис. 4. Минимальные имена 4-...7-вершинников
Fig. 4. Minimum names of 4-...7-acrons

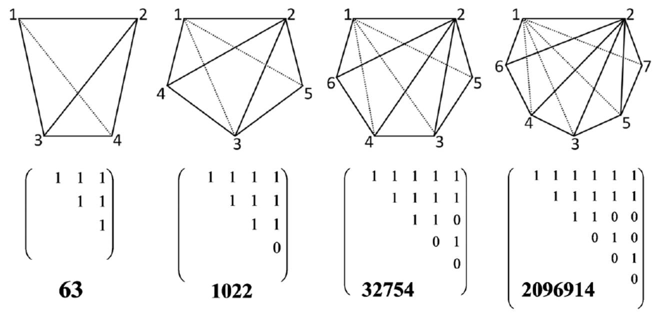


Рис. 5. Максимальные имена 4-...7-вершинников
Fig. 5. Maximum names of 4-...7-acrons

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
[lg min_n, lg max_n]	[1.80, 1.80]	[2.71, 3.01]	[3.90, 4.52]	[5.38, 6.32]	[7.18, 8.43]	[9.28, 10.84]	[11.68, 13.55]	[14.39, 16.56]	[17.40, 19.87]

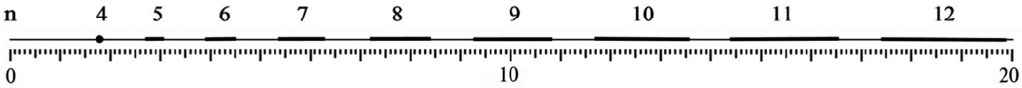


Рис. 6. Интервалы [lg min_n, lg max_n] для n = 4...12 на числовой прямой
Fig. 6. The [lg min_n, lg max_n] ranges for n = 4 to 12 on a real line

Заключение

Идея А. Ф. Лосева об имени, говорящем о вещи все и не содержащем информационного шума, оказалась реализуемой для выпуклых полиэдров. В мире чисел они достигли «тождества со своим инобытием» и успешно обрабатываются на компьютере. Справедливости ради заметим, что другого такого примера мы не знаем. Удобен ли построенный алгоритм для описания кристаллических полиэдров? Скорее нет, чем да, по двум причинам. 1. Принятая в кристаллографии номенклатура создана для быстрого распознавания форм и коммуникации, она указывает на форму символически (куб — это...) или конструктивно (тетрагонтриоктаэдр строим так-то). Эту задачу она решает хорошо и успешно осваивается поколениями студентов. 2. Форма идеального кристалла определена структурой с точностью до т. г. с. Поэтому закономерно, что и номенклатура полиэдрических простых форм использует указания на тетраэдр, куб, октаэдр с известными т. г. с. — это рационально. Отметим важные кристаллографические следствия из результатов табл. 1: интуитивное представление о преобладающей в мире полиэдров симметрии в корне неверно. Класс примитивных триклинных полиэдров, выглядящий изгоем в известной таблице 32 т. г. с., среди абстрактных выпуклых полиэдров преобладает довлеющим образом. Зато среди минеральных преобладают простые (с 3-валентными вершинами) полиэдры. Но это — совсем другое свойство формы, с симметрией не связанное. Эту связь еще предстоит исследовать.

И хотя между философским, математическим, кристаллографическим, минералогическим и прочими рассуждениями о полиэдрах (они везде в живой и неживой природе) зияют смысловые зазоры, кажется полезным, чтобы студенты знали, как решается задача о строгом именовании выпуклого полиэдра, как он кодируется матрицей смежности, а та – бинарным кодом, переводимым в натуральное число, как все выпуклые полиэдры закономерно (кластерами по числу вершин, на левом фланге – пирамиды, на правом — «склеенные тетраэдры») выстраиваются на числовой прямой, наконец, как специальная кристаллографическая задача утопает в философской проблеме. Результаты схвачены почти десятком теорем и открывают перспективу исследования на стыке нескольких дисциплин. Профессор Д. П. Григорьев не уставал повторять своим студентам, что «минералы — не на бумаге, а в природе», т. е. в мире вещей. Мы постарались показать другую сторону проблемы — имя вещи не есть сама вещь, а принадлежит миру идей. Поэтому именование полиэдрических форм оказалось частью проблемы имени вещи в общей философской постановке. Отталкиваясь от предметов своей науки, время от времени стоит задумываться о природе вещей (Лукреций, 2006).

Автор благодарит к. г.-м. н. Д. Г. Степенщикова за творческое сотрудничество в пору нашего увлечения проблемой генерирования многообразий выпуклых полиэдров и рецензентов за профессиональные рекомендации, способствовавшие более полному и понятному изложению материала.

Литература / References

Войтеховский Ю. Л. 100 лет Федоровскому институту // Зап. РМО. 2021. № 4. С. 135—141. doi:10.31857/S0869605521040080
Voytekhovsky Yu. L. 100 years of Fedorov Institute. Proc. Rus. Miner. Soc., 2021, No. 4, pp. 135—141. doi:10.31857/S0869605521040080. (in Russian)

Войтеховский Ю. Л., Степенщиков Д. Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV. Выпуклые полиэдры. Т. I. 4-...12-эдры. Апатиты: КНЦ РАН, 2008а. 833 с.
Voytekhovsky Yu. L., Stepenschikov D. G. Combinatorial crystal morphology. Book IV. Convex polyhedra. Vol. I. 4-...12-hedra). Apatity: Kola SC RAS, 2008a, 833 p. (in Russian)

Войтеховский Ю. Л., Степенщиков Д. Г. Комбинаторная кристалломорфология. Кн. IV. Выпуклые полиэдры. Т. II. Простые 13-...16-эдры. Апатиты: КНЦ РАН, 2008б. 828 с.

Voytekhovsky Yu. L., Stepenschikov D. G. Combinatorial crystal morphology. Book IV. Convex polyhedra. V. 2. Simple 13-...16-hedra. Apatity: Kola SC RAS, 2008b, 828 p. (in Russian)

Лосев А. Ф. Философия имени. М.: Академический проект, 2009. 300 с.
Losev A. F. Philosophy of the Name. Moscow: Academic Project, 2009, 300 p. (in Russian)

Лукреций (Тит Лукреций Кар). О природе вещей. М.: Мир книги, 2006. 336 с.
Lucretius (Titus Lucretius Carus). On the Nature of Things. Moscow: Mir knigi, 2006, 336 p. (in Russian)

Федоров Е. С. Основания морфологии и систематики многогранников // Зап. Имп. С.-Петербург. минерал. об-ва. 1893. Ч. 30. С. 241—341.
Fedorov E. S. Foundations of morphology and systematics of polyhedra. Proc. Imp. Saint Petersburg Miner. Soc., 1893, pt. 30, pp. 241—341. (in Russian)

Шафрановский И. И., Мокиевский В. А., Стулов Н. Н. Дискуссии о номенклатуре кристаллографических форм во Французском минералогическом обществе // Зап. ВМО. 1959. № 4. С. 492—495.
Shafranovsky I. I., Mokievsky V. A., Stulov N. N. Discussions on the nomenclature of crystallographic forms at the French Mineralogical Society. Proc. All-Rus. Miner. Soc., 1959, No. 4, pp. 492—495. (in Russian)

Boldyrev A. K. Die von Fedorov Institut angenommene kristallographische Nomenklatur. Zeitschr. Krist., 1925, Bd. 62, S. 145—150.

Boldyrev A. K. Are there 47 or 48 simple forms possible on crystals? Amer. Miner., 1936, vol. 21, No. 11, pp. 731—734.

Bouwkamp C. J. On the dissection of rectangles into squares // Proc. Nederl. Akad. Wetensch., 1946, A49, pt. I, pp. 1176—1188; A50, pt II, pp. 58—71; pt. III, pp. 72—78.

Bowen R., Fisk S. Generation of triangulations of the sphere // Math. Comp., 1967, vol. 21, pp. 250—252.

Britton D., Dunitz J. D. A complete catalogue of polyhedra with eight or fewer vertices // Acta Cryst., 1973, A29, pp. 362—371.

Brückner M. Vielecke und Vielfläche. Leipzig: Teubner, 1900, 250 S.

Duijvestijn A. J. W., Federico P. J. The number of polyhedral (3-connected planar) graphs // Math. Comp., 1981, vol. 37, pp. 523—532.

Engel P. On the enumeration of polyhedra // Discrete Math., 1982, vol. 41, pp. 215—218.

Engel P. On the morphology of polyhedra // Zapiski (Proceedings) Rus. Miner. Soc., 1994, No. 3, pp. 20—25.

Engel P. On the enumeration of the simple 3-polyhedra // Acta Cryst., 2002, A59, pp. 14—17.

Federiko P. J. Enumeration of polyhedra: the number of 9-hedra // J. Comb. Theory, 1969, No. 7, pp. 155—161.

Federiko P. J. Polyhedra with 4 to 8 faces // Geometr. Dedicata, 1975, vol. 3, pp. 469—481.

Grace D. W. Computer search for non-isomorphic convex polyhedra. Ph. D. Thesis. Comp. Sci. Dept., Stanford University, California, USA. 1965.

Hermes O. Die Formen der Vielflache // J. reine angew. Math., 1899, vol. 120, S. 305—353.

Kirkman T. P. Applications of the theory of the polyedra to the enumeration and registration of results // Proc. Royal Soc. London, 1862/1863, vol. 12, pp. 341—380.

Mani P. Automorphismen von polyedrischen Graphen. Math. Ann., 1971, vol. 192, S. 279—303.

Voytekhovsky Yu. L. On the symmetry of 4- to 11-hedra // Acta Cryst., 2001a, A57, pp. 112—113.

Voytekhovsky Yu. L. The Fedorov algorithm revised // Acta Cryst., 2001b, A57, pp. 475—477.

Voytekhovsky Yu. L. Convex polyhedra with minimum and maximum names. Acta Cryst., 2017a, A73, pp. 271—273. https://doi.org/10.1107/S2053273317004053

Voytekhovsky Yu. L. Accelerated scattering of convex polyhedra. Acta Cryst., 2017b, A73, pp. 423—425. https://doi.org/10.1107/S2053273317009196

Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G. On the symmetry of 9- and 10-hedra // Acta Cryst., 2002a, A58, pp. 404—407.

Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G. On the symmetry of simple 12- and 13-hedra // Acta Cryst., 2002b, A58, pp. 502—505.

Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G. On the symmetry of 11-hedra // Acta Cryst., 2003a, A59, pp. 195—198.

Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G. On the symmetry of simple 14- and 15-hedra // Acta Cryst., 2003b, A59, pp. 367—370.

Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G. The variety of convex 12-hedra revised // Acta Cryst., 2005, A61, pp. 581—583.

Voytekhovsky Y. L., Stepenshchikov D. G. On the symmetry of simple 16-hedra // Acta Cryst., 2006, A62, pp. 230—232.

Received / Поступила в редакцию 11.08.2023