УДК 548.71 DOI: 10.19110/geov.2025.4.5

Из опыта преподавания. XVII. Бордюры и предельные группы Кюри.

Ю. Л. Войтеховский

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия
Российское минералогическое общество, Санкт-Петербург, Россия
vojtehovskijj@herzen.spb.ru

При замыкании конечного линейного орнамента в кольцо трансляция вдоль прямой переходит во вращение вокруг оси симметрии конечного порядка. На бесконечном кольце возникает естественная аналогия групп симметрии кристаллографических бордюров и предельных групп симметрии Кюри с одной осью ∞. Но первых семь, а вторых пять. Еще две выделены в статье из предельных групп *∞/m* вращающегося и *∞/mm* покоящегося цилиндров. Тем самым достигнуто взаимно однозначное соответствие. Пример рекомендован для рассмотрения в университетском курсе кристаллографии по темам «Группы симметрии бордюров» и «Предельные группы Кюри».

Ключевые слова: *группы симметрии бордюров, предельные группы Кюри*

From teaching experience. XVII. Borders and Curie's limit groups

Yu. L. Voytekhovsky

A. I. Herzen Russian State Pedagogical University, Saint Petersburg, Russia
Russian Mineralogical Society, Saint Petersburg, Russia

When closing a finite linear ornament into a ring, translation along a straight line turns into rotation around a finite-order symmetry axis. A natural analogy between the symmetry groups of crystallographic borders and Curie's limit symmetry groups with one ∞ axis arises on an endless ring. But the former are seven and the latter are five. Another two are isolated in the paper from the limit groups ∞/m of rotating and ∞/mm of common cylinders. Thereby a mutually unambiguous correspondence has been achieved. The example is recommended for consideration in the university course of crystallography on the topics «Symmetry groups of borders» and «Curie's limit groups».

Keywords: *symmetry groups of borders, Curie's limit groups*

Введение

Однажды во время лекции о кристаллографических бордюрах, т. е. линейных односторонних ритмично упорядоченных орнаментах (Шубников, 1940), нами было отмечено, что наши прабабушки, замыкая ритмические узоры на платьях, рубахах, фуражках и тюбетейках, всякий раз превращали трансляции в поворотные оси. Математический формализм позволяет замкнуть кристаллографический бордюр в «бесконечно удаленной точке» (это непросто представить), тем самым создав ось ∞ бесконечного порядка, ведь на бесконечном кольце умещается бесконечно много конечных (даже как угодно больших) повторяющихся фрагментов орнамента. Но каждый изучавший кристаллографию должен ощутить здесь некую опасность. С бесконечностями всегда так…

В кристаллографию ось ∞ ввел П. Кюри для описания физических сред, полей и свойств кристаллов. Идея родилась в пору его работы в минералогической лаборатории Сорбонны и открытия пьезоэлектричества в 1880 г. (Шпольский, 1956), но систематически изложена в статьях 1883–1884 гг., много раз переизданных (Curie, 1894, 1908; Кюри, 1966а, 1966б, 1966в). С точки зрения симметрии бордюров и предельных групп Кюри по семь — замечательное совпадение! Но среди последних лишь пять с одной осью ∞, а две сферические к нашему случаю не относятся. Тогда где еще 2 группы? Или 2 бордюра при замыкании исчезают? Обсуждению этой коллизии и посвящена статья.

Иерархия бордюров и предельных групп Кюри

К иерархиям бордюров и групп Кюри сделаем несколько пояснений. В предложенных ранее обозначениях бордюров (Войтеховский, 2020, 2021) буквами обозначены (рис. 1, слева): продольная плоскость P, поперечная П, центр инверсии C (эквивалентен ортогональной бордюру оси L_2), трансляция T и скользящее отражение T* (композиция T и отражения в P на половине трансляции). Их полный перечень в символе упрощает сравнение бордюров. При этом T вкладывается в T*, а T* — в PT (рис. 1, справа).

Многие отдавали должное П. Кюри в связи с предельными группами симметрии, но большей частью ввиду их приложений к физическим объектам и явле-

Для цитирования: Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. XVII. Бордюры и предельные группы Кюри // Вестник геонаук. 2025. 4(364). С. 51–56. DOI: 10.19110/geov.2025.4.5

For citation: Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. XVII. Borders and Curie's limit groups. Vestnik of Geosciences, 2025, 4(364), pp. 51–56, doi: 10.19110/geov.2025.4.5

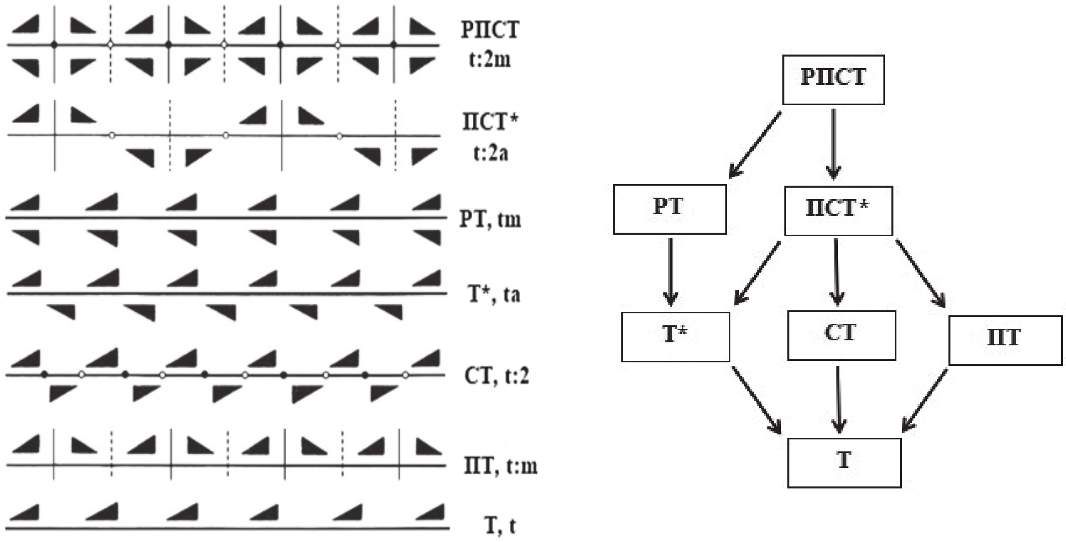

Рис. 1. Бордюры (слева) и их иерархия по группам симметрии (справа). Обозначения по: Войтеховский, 2020, 2021 и Шубников, 1940

Fig. 1. Borders (on the left) and their hierarchy by symmetry groups (on the right). Designations by: Voytekhovsky, 2020, 2021 and Shubnikov, 1940

ниям (Иоффе, 1956; Копцик, Рез, 1981), а также принципу диссимметрии (Шубников, 1961; Шафрановский, 1964, 1966; Chalmers, 1970; Ismael, 1997; Castellani, Ismael, 2016). Геометрический аспект с акцентом на симметрии конусов, цилиндров, сфер и их природных прототипов обсуждается кристаллографами (Шубников, 1956, с. 592; 1972, с. 34; Шафрановский, 1957). Вложения предельных групп обсуждаются редко, это весьма специфическая тема. И в монографии (Вайнштейн, 1979,

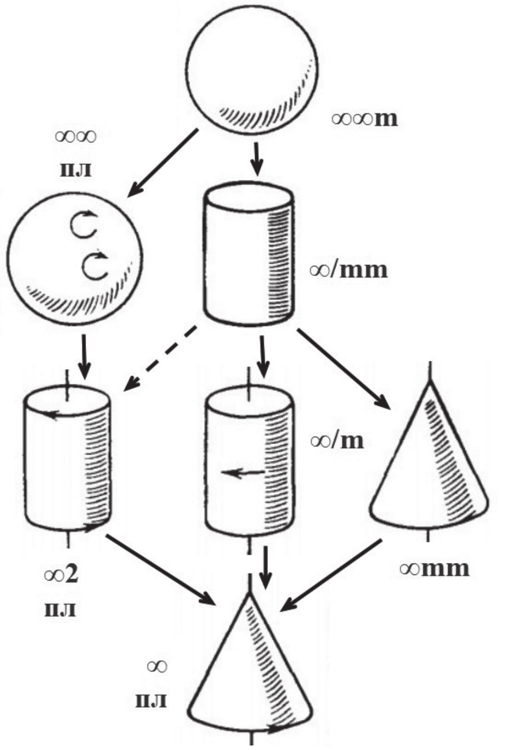

Рис. 2. Иерархия предельных групп симметрии Кюри (Вайнштейн, 1979). Буквы «пл» указывают на энантиоморфные (правые и левые) разновидности

Fig. 2. Hierarchy of limit symmetry groups of Curie (Weinstein, 1979). The letters «пл» indicate enantiomorphic (right and left) varieties

с. 107) допущена неточность. Группа $\infty 2$ вкладывается не только в $\infty\infty$, но и в ∞/mm (рис. 2, дано штрихами). Кристаллографические примеры: $(222 \rightarrow 422) \rightarrow 4/mmm$, $32 \rightarrow (\underline{6}m2$[1] $\rightarrow 6/mmm)$, $622 \rightarrow 6/mmm$. В скобках: в 1-м случае — подгруппы скрученного, во 2-м — покоящегося цилиндров. Студентам бывает трудно понять, как вращающиеся конусы и цилиндры вкладываются в неподвижные. Следует указывать, что последние допускают вращение в обе стороны.

Оси вращения конусов обычно показывают ориентированными (Вайнштейн, 1979, с. 100). Это лишнее, ведь конусы уже запрещают переворачивающие элементы симметрии, разрешая лишь продольные плоскости в группе ∞mm (рис. 2). Ориентировки осей нужны при замене конусов на цилиндры, что сделано далее при рисовании на них замкнутых бордюров. Обратная замена цилиндров на конусы, склеенные основаниями, применена в работе (Франк-Каменецкий и др., 1984, с. 19). В обозначениях предельных групп имеет место разброд. А. В. Шубников не экономил на указаниях взаимного расположения элементов симметрии: ∞, $\infty{\cdot}m$, $\infty{:}m$, $\infty{:}2$, $m{\cdot}\infty{:}m$, ∞/∞, $\infty/\infty{\cdot}m$ (Шубников, 1956, с. 592; 1972, с. 34). Позднее стали прибегать к сокращениям и/или модификациям символов (в т. ч. на рис. 2).

Группы симметрии замкнутых бордюров

На рис. 3 показаны замкнутые бордюры на цилиндрах с числом повторяющихся фрагментов n = 1–4. Перечислим порождаемые ими кристаллографические точечные группы симметрии (т. г. с., в скобках — для n = 6), найдем формулы симметрии для любого n и совершим переход $n \rightarrow \infty$, понимая под ∞ как угодно большое n.

РПСТ: $mm2$, mmm, $\underline{6}m2$, $4/mmm$, $(6/mmm)$ ...; $\underline{2n}m2$ (ложная инверсия — см. далее) для нечетных и n/mmm

[1] Здесь и далее инверсионные оси подчеркнуты — это проще при наборе, чем черта сверху.

для четных n; переход: ∞/mm (нечетные n) и ∞/mmm [2] (четные n) — покоящийся цилиндр;

ПСТ*: $2/m$, $\underline{4}2m$, $\underline{3}m$ …; $\underline{n}m$ (ложная инверсия) для нечетных и $\underline{2n}2m$ (истинная инверсия — см. далее) для четных n; переход: $\underline{\infty}m$ (?);

РТ: m, $2/m$, $\underline{6}$, $4/m$, ($6/m$) …; $\underline{2n}$ (ложная инверсия) для нечетных и n/m для четных n; переход: ∞/m — вращающийся цилиндр;

Т*: $\underline{1}$, $\underline{4}$, $\underline{3}$ …; $\underline{n}$ (ложная инверсия) для нечетных и $\underline{2n}$ (истинная инверсия) для четных n; переход: $\underline{\infty}$ (?);

СТ: 2, 222, 32, 422, (622) …; $n2$ для нечетных и $n22$ для четных n; переход: $\infty 2$ (нечетные n) и $\infty 22$ [3] (четные n) — скрученный цилиндр;

ПТ: m, $mm2$, $3m$, $4mm$, ($6mm$) …; nm для нечетных и nmm для четных n; переход: ∞m (нечетные n) и ∞mm [4] (четные n) — покоящийся конус;

Т: 1, 2, 3, 4, (6) …; n; переход: ∞ — вращающийся конус.

Пропавшие бордюры

Итак, пропавшими оказались замкнутые бордюры Т* и ПСТ* со скользящими отражениями, превратившимися в инверсии. (При этом инверсии С бордюров на рис. 1 превратились в оси 2, перпендикулярные осям ∞ замкнутых бордюров на рис. 3.) Это им не нашлось эквивалентов в схеме предельных групп Кюри (рис. 2). И трудно сразу предложить геометрические формы и/или движения, промежуточные (по вложению) между вращающимися конусом и цилиндром для Т*, скрученным и обычным цилиндрами для ПСТ* (рис. 2 и 3).

К характеристике именно этих бордюров относятся инверсионные оси, названные выше ложными и истинными. Фраза «инверсионная ось n-го порядка» имеет смысл для любого n и подразумевает поворот фигуры на угол 360/n с последующим отражением в лежащей на оси точке, истинным центром инверсии не являющейся. Но легко увидеть и прочитать объяснение в учебниках кристаллографии для n = 1–4 и 6, что инверсионная ось нечетного порядка — композиция простой оси того же порядка и истинного центра инверсии: $\underline{2n+1} = L_{2n+1} + C$ ($\underline{1} = C$, $\underline{3} = 3 + C$); инверсионная ось четного порядка вида $\underline{4n+2}$ — композиция простой оси в два раза меньшего нечетного порядка и перпендикулярной плоскости $\underline{4n+2} = L_{2n+1} + m$ ($\underline{2} = 1 + m = m$, $\underline{6} = 3 + m$). Те и другие — ложные. Лишь инверсионные оси четного порядка вида $\underline{4n}$ истинные, т. е. не выражаемые через обычные элементы симметрии, известные до открытия О. Браве оси $\underline{4}$ на тетраэдре. Именно истинные инверсионные оси составляют специфику замкнутых бордюров Т* и ПСТ*. В схеме предельных групп Кюри (рис. 2) все оси ∞ обычные. Но куда могут быть вложены инверсионные оси $\underline{\infty}$? Почти очевидно, что только в группы ∞/m вращающегося и ∞/mm покоящегося цилиндров.

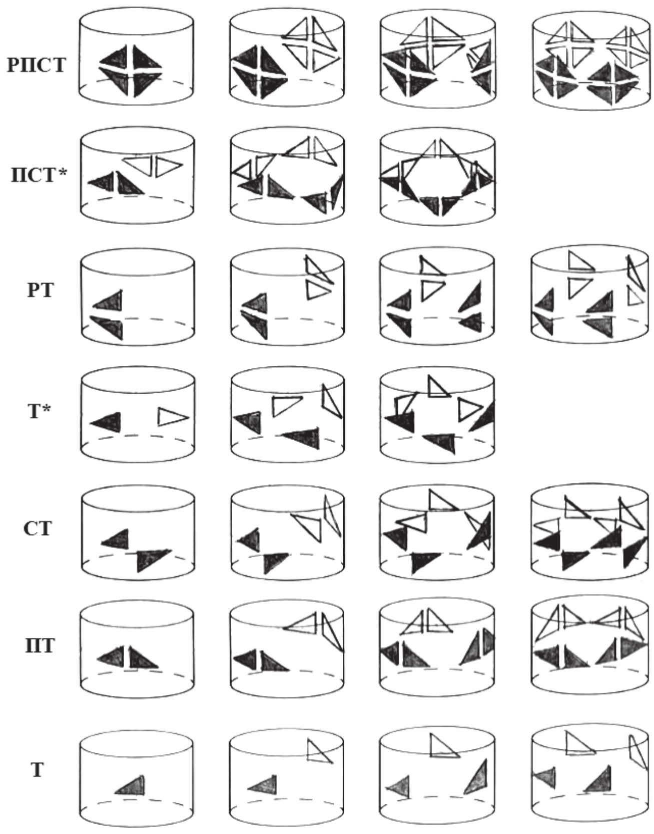

Рис. 3. Замкнутые бордюры. Пояснения в тексте

Fig. 3. Closed borders. See text

В приведенном списке бордюров есть 27 кристаллографических т. г. с. (без 5 кубических). Это естественно, ведь среди порождающих операций симметрии — все разрешенные для конечных фигур. Но 4 т. г. с. получены дважды: 2 (Т, СТ), m (ПТ, РТ), $mm2$ (ПТ, РПСТ), $2/m$ (РТ, ПСТ*). Их элементы симметрии по-разному ориентированы относительно осей ∞ конуса и цилиндра. Так как n = 1, 2, 3, …, в приведенном списке содержатся вообще все (кроме кубических) т. г. с. По-видимому, их вывод через замкнутые бордюры никем ранее не выполнялся[5].

Ось бесконечного порядка

Присмотримся к оси ∞. По аналогии с осями L_n конечных порядков следует полагать, что при повороте

[2] Для нечетных n в символе ∞/mm две m означают поперечную (к оси ∞) и продольные (эквивалентные между собой) плоскости симметрии. Для четных n в символе ∞/mmm указаны поперечная и два сорта продольных плоскостей. Так, в тетрагональной призме ($4/mmm$) две из них ортогональны граням, еще две — диагональные.

[3] Аналогично предыдущему в отношении осей 2, ортогональных оси ∞.

[4] Аналогично предыдущему в отношении плоскостей, проходящих вдоль оси ∞.

[5] И. Гессель (1830) при выводе т. г. с. конечных фигур шел другим путем, О. Браве (1849) и А. В. Гадолин (1867) ограничились выводом 32 т. г. с. кристаллов. При этом О. Браве пропустил т. г. с. $\underline{4}$, на что указал П. Кюри: «Помимо отсутствия гармонии, к которому должно было привести это упущение, Браве забыл об одном типе симметрии, в котором нет ни центра симметрии, ни плоскости симметрии, но в котором имеется плоскость перемежающейся симметрии» (Кюри, 1966б, с. 92). Имея в виду эту ошибку предшественника, в своих построениях он клал в основу плоскости двух типов, оси симметрии и центры инверсии. Предельные и конечные группы симметрии без плоскостей он называл «лишенными симметрии»: вращающиеся сфера и конус, скрученный цилиндр (там же, с. 83, 87, 89). В его формулах порядок оси дан в общем виде (q). Поэтому *ab ovo* в них заложен результат И. Гесселя.

на 360° фигура (в т. ч. бесконечная — среда или поле) совмещается с собой ∞ (бесконечно много) раз при повороте на бесконечно малый угол 360/∞. В этом рассуждении, тиражируемом в университетских курсах, не все гладко. Ведь ∞ — не число, его нельзя получить арифметически, потому и 360/∞ — не число. Оба сопротивляются представлению уже потому, что не рождают убедительную интуицию числа. Конусы, цилиндры и сферы у П. Кюри — символы гладкости. Суть не столько в этих формах, подобранных для иллюстрации, сколько в группах присущих им элементов симметрии, характеризующих известные физические (потенциально бесконечные и бесформенные) поля, среды и свойства.

Вот еще один способ понимания. «Конус подобен n-гональной пирамиде средних сингоний» (Шафрановский, 1973). В той же мере цилиндр подобен n-гональной призме. При $n \to \infty$ пирамиды и призмы (с оговорками, заставляющими грани дружно убывать по площади) стремятся к конусу и цилиндру, n-гранные фуллерены с икосаэдрической симметрией — к сфере. А вот похожее рассуждение. «Из дискретных элементов симметрии можно получить элементы непрерывной (предельной) симметрии групп Кюри. Из оси симметрии n-го порядка можно получить ось бесконечного порядка, устремляя n к бесконечности. Образом точки при таком преобразовании является окружность и поворот осуществляется на бесконечно малый угол. Второе непрерывное преобразование — это трансляция на бесконечно малое расстояние, получаемое из обычной конечной трансляции с помощью того же предельного перехода. Образом точки при таком преобразовании является прямая линия» (Франк-Каменецкий и др., 1984, с. 14). Впрочем, повод к такому представлению дал сам П. Кюри, обсуждая соотношение плоскостей «непрерывной» и «перемежающейся» симметрии (т. е. плоскости скользящего отражения) в бесконечных системах: «Мы имеем плоскость непрерывной трансляционной симметрии, если трансляция τ бесконечно мала» (Кюри, 1966б, с. 79).

Выражение «стремиться к бесконечности» туманно. Нельзя стремиться к чему-то столь плохо определенному, «что больше любого наперед заданного числа». Тогда почему нам кажется понятным символ 360/∞, обычно принимаемый за 0? Следует различать два нуля: один — арифметический, другой — неощутимый в его малости антипод необъятной огромности (Генон, 2013). Иначе говоря, есть два взаимно обратных стремления: $n \to \infty$ и $360/n \to 0$. Но если мы легко перешагиваем исчезающе малый зазор между 360/n и 0, то перешагнуть неубывающую бездну между растущим n и ∞ нельзя[6]. Это выглядит парадоксом, но в смысле Г. Кантора (по числу точек) эти континуумы на числовой оси равномощны.

Наконец, неограниченно увеличивая порядок оси симметрии n, мы циклично переходим от нечетного числа к четному и наоборот, в этом смысле топчась на месте. Выше показано, что в этом кроется важный момент — разные формулы симметрии для нечетных и четных n даже в одном типе замкнутого бордюра, и более того, рождение истинной инверсии при четных n, кратных 4.

Геометрическая интерпретация

На рис. 4 дана геометрическая интерпретация т. г. с. замкнутых бордюров, включающая известную схему предельных групп Кюри. Полосы, параллельные образующим цилиндра, двуцветные (условно «+» и «–») с краем и без края (сплошная и точечная линии соответственно). Еще лучше представлять «+» и «–» как черный и белый цвета. Тогда при $n \to \infty$ полосы, становясь все тоньше, дадут системы прямых линий (образующих цилиндров), тем не менее сохраняющих их т. г. с. В прямоугольных рамках — соподчиненные бордюры, соответствующие предельным группам Кюри ∞/m вращающегося и ∞/mm покоящегося цилиндров (рис. 2).

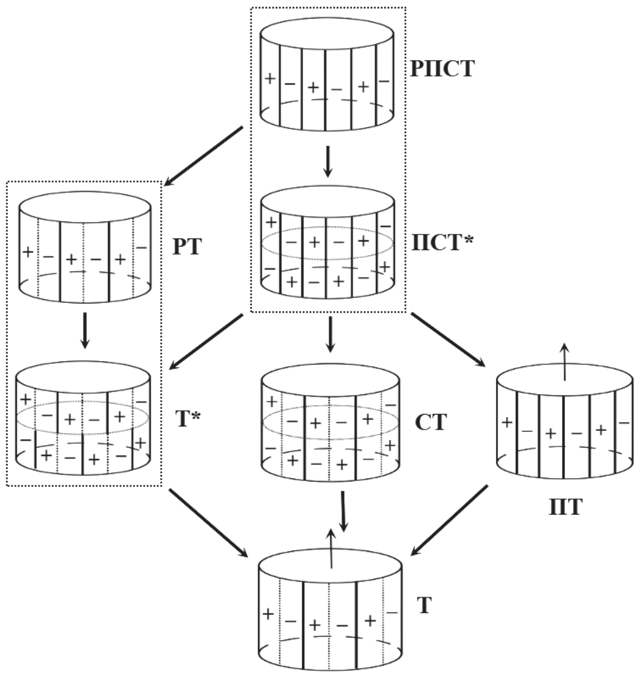

Рис. 4. Геометрическая интерпретация замкнутых бордюров. Пояснения в тексте

Fig. 4. Geometric interpretation of closed borders. See text

Заключение

Поясним еще раз, почему в системе Кюри оказалось 5, а не 7 предельных групп с одной «осью изотропии» ∞. В статье Кюри (1966а, с. 58) дана классификация из 10 «систем повторяемости», 3 из них — с осями ∞: сфера, цилиндр и «усеченный» (?) конус. Вращений не указано, но для конуса (и только для него) дан физический прототип — электрическое поле. В другой статье Кюри (1966б, с. 88) предложена более детальная классификация из 24 «конечных систем повторяемости и симметрии». В «сферическом» типе выделены вращающаяся[7] и покоящаяся[8] сферы, в типе «с двусто-

[6] Подходящую метафору подсказывает изящная литература: «Нельзя вернуться из вечности, ибо от бесконечности ее отделяет бездна, через которую никому не дано перепрыгивать то туда, то сюда по своему хотению» (Г. Майринк. Ангел западного окна. М.: Эксмо, 2024. С. 443).

[7] «Сфера, наполненная жидкостью, обладающей способностью вращать плоскость поляризации» (Кюри, 1966б, с. 83).

[8] «Например, сферическая поверхность» (Кюри, 1966б, с. 83).

ронней осью изотропии» — скрученный[9] и покоящийся[10] цилиндры, в типе «с осью изотропии и противоположной ей» — вращающийся цилиндр[11], вращающийся[12] и покоящийся[13] конусы.

В обеих работах для систем с осями конечных порядков рассмотрены варианты с нечетными и четными n, получены все 32 т. г. с. конечных фигур — без учета инверсионных осей последний результат не мог быть получен. Но, переходя к пределу при $n \to \infty$ (суть именно в этом!), Кюри совместил их с обычными осями симметрии[14]. По нашему мнению, ось $L_\infty = L_n$ при $n \to \infty$ можно понимать в том смысле, что n как угодно велико, но сохраняет специфику (нечетное или четное, в последнем случае — кратно ли 4). В этой ситуации имеет место взаимно однозначное соответствие т. г. с. замкнутых бордюров и предельных групп Кюри, что логично. Мы не видим рациональности в игнорировании двух замкнутых бордюров с истинными инверсионными осями.

Исчерпана ли тема? Присмотримся к понятию гладкости. Столь осязаемое для сферы, цилиндра и конуса, оно скрывает математический омут. Гладкость функции характеризуется числом ее непрерывных производных (своего рода аналоги физической шероховатости). Чтобы быть гладкой, надо прежде быть непрерывной, хотя не обязательно равномерно непрерывной. Не углубляясь в нюансы определений, предположим, что уточнения этих понятий для полей, сред и свойств еще откроют путь к детализации предельных групп Кюри.

Возможное возражение состоит и в том, что ко всем предельным группам сам П. Кюри и последователи подобрали физические прототипы. Есть ли таковые для двух «инверсионных» замкнутых бордюров (предельных групп)? Мы пока затрудняемся их указать. Но возможность их геометрической интерпретации в единой системе с известными предельными группами (рис. 4) обнадеживает. Может быть, найдутся и физические прототипы, и тогда окажется, что известные предельные группы симметрии — лишь первое приближение к описанию реальности. «В заключение отметим, что идеи Пьера Кюри в области учения о симметрии нельзя считать до конца оформленными. Это сделают будущие поколения» (Шубников, 1956, с. 602).

Автор благодарит рецензентов за рекомендации, способствовавшие лучшему изложению результатов.

[9] «Прямой круглый цилиндр, наполненный жидкостью, обладающей вращательной способностью. Система двух одинаковых цилиндров, оси изотропии которых расположены на продолжении друг друга, вращающихся в противоположных направлениях с одинаковой скоростью вокруг их общей оси» (Кюри, 1966б, с. 87). Граница двух цилиндров обычно подразумевается (рис. 2). На рис. 4 она показана.

[10] «Прямой круглый цилиндр» (Кюри, 1966б, с. 87).

[11] «Магнитное поле. Прямой круглый цилиндр, вращающийся с некоторой скоростью вокруг своей оси изотропии» (Кюри, 1966б, с. 89). «Цилиндрический магнит вместе с окружающим его магнитным полем» (Шубников, 1956, с. 593).

[12] «Круглый прямой конус, вращающийся с некоторой скоростью вокруг своей оси» (Кюри, 1966б, с. 89).

[13] «Электрическое поле. Прямой круглый конус» (Кюри, 1966б, с. 89). «Электрический аналог магнита – вольтов столб, или цилиндрический диэлектрик, поляризованный вдоль своей оси» (Шубников, 1956, с. 593).

[14] О том же в изотропной среде: «…каждая точка нашей среды является ее центром симметрии, в котором пересекается бесконечное множество осей бесконечного порядка (простых и зеркальных), направленных во все стороны пространства…» (Шубников, 1961, с. 22). И тогда нельзя ли из предельной группы покоящейся сферы выделить группы с простыми и инверсионными осями? Ведь она, по сути, есть суперпозиция всевозможных покоящихся цилиндров с осями ∞, пересекающимися в общей точке.

Литература / References

Вайнштейн Б. К. Современная кристаллография. Т. 1. Симметрия кристаллов. Методы структурной кристаллографии. М.: Наука, 1979. 384 с.
Weinstein B. K. Modern crystallography. V. 1. Symmetry of crystals. Methods of structural crystallography. Moscow: Nauka, 1979, 384 p. (in Russian)

Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. VI. Симметрия бордюров // Вестник геонаук. 2020. № 8(308). С. 28–31. DOI: 10.19110/geov.2020.8.4
Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. VI. Symmetry of borders. Vestnik of Geosciences, 2020, No. 8(308), pp. 28–31. (in Russian)

Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. VII. Соподчинение групп симметрии и кристаллографический критерий гармонии // Вестник геонаук. 2021. № 2(314). С. 19–22. DOI: 10.19110/geov.2021.2.4
Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. VII. Subordination of symmetry groups and crystallographic criterion of harmony. Vestnik of Geosciences, 2021, 2(314), pp. 19–22. (in Russian)

Генон Р. Наука чисел. СПб.: Владимир Даль, 2013. 270 с.
Guénon R. The science of numbers. Saint Petersburg: Vladimir Dal, 2013, 270 p. (in Russian).

Иоффе А. Ф. Пьер Кюри // Успехи физ. наук. 1956. Т. 58, вып. 4. С. 571–579.
Ioffe A. F. Pierre Curie. Successes of Physics, 1956, V. 58, 4, pp. 571–579. (in Russian)

Копцик В. А., Рез И. С. Работы Пьера Кюри в области кристаллофизики. К 100-летию обнаружения пьезоэлектрического эффекта // Успехи физ. наук. 1981. Т. 134, вып. 1. С. 149–152.
Koptsik V. A., Rez I. S. The works of Pierre Curie in the field of crystallophysics. In memory of the 100th anniversary of the discovery of the piezoelectric effect. Successes of Physics, 1981, 134, No. 1, pp. 149–152. (in Russian)

Кюри П. О вопросах упорядоченности: повторяемость // Избр. труды. М.; Л.: Наука, 1966а. С. 48–65.
Curie P. On issues of orderliness: repeatability. Selected works. Moscow, Leningrad: Nauka, 1966, pp. 48–65. (in Russian)

Кюри П. О симметрии // Избр. труды. М.; Л.: Наука, 1966б. С. 66–94.
Curie P. About symmetry. Selected works. Moscow, Leningrad: Nauka, 1966, pp. 66–94. (in Russian)

Кюри П. О симметрии в физических явлениях: симметрия электрического и магнитного полей // Избр. труды. М., Л.: Наука, 1966в. С. 95–113.
Curie P. On the symmetry in physical phenomena: symmetry of electric and magnetic fields. Selected works. Moscow, Leningrad: Nauka, 1966 , pp. 95–113. (in Russian)

Франк-Каменецкий В. А., Дубов П. Л., Шафрановский И. И. Классическая симметрия. Л.: Изд. ЛГУ, 1984. 88 с.
Frank-Kamenetsky V. A., Dubov P. L., Shafranovsky I. I.

Classical symmetry. Leningrad: Leningrad State University, 1984, 88 p. (in Russian).

Шафрановский И. И. Пьер Кюри — кристаллограф // Тр. Ин-та истории естествознания и техники АН СССР. 1957. Т. 19. С. 84–94.
Shafranovsky I. I. Pierre Curie — crystallographer. Proc. Inst. of History of Natur. Sci. and Technol. of USSR Acad. Sci., 1957, V. 19, pp. 84–94. (in Russian).

Шафрановский И. И. К вопросу об уточнении универсального принципа симметрии Кюри // Зап. ВМО. 1964. № 4. С. 460–463.
Shafranovsky I. I. On the question of clarifying the universal Curie's principle of symmetry. Proc. Rus. Miner. Soc., 1964, No. 4, pp. 460–463. (in Russian).

Шафрановский И. И. Несколько слов по поводу русского перевода трудов П. Кюри // Зап. ВМО. 1966. № 6. С. 771–772.
Shafranovsky I. I. A few words about the Russian translation of the P. Curie's works. Proc. Rus. Miner. Soc., 1966, No. 6, pp. 771–772. (in Russian).

Шафрановский И. И. Статистический закон Федорова-Грота и некоторые связанные с ним обобщающие аналогии // Зап. ВМО. 1973. № 1. С. 87–88.
Shafranovsky I. I. The statistical law of Fedorov–Groth and some related generalizing analogies. Proc. Rus. Miner. Soc., 1973, No. 1, pp. 87–88. (in Russian).

Шпольский Э. В. Жизнь и деятельность Пьера Кюри. 1859–1906 // Успехи физ. наук. 1956. Т. 58, вып. 4. С. 581–598.
Shpolsky E. V. The life and work of Pierre Curie. 1859–1906. Successes of Physics, 1956, T. 58, V. 4, pp. 581–598. (in Russian).

Шубников А. В. Симметрия. М., Л.: Изд. АН СССР, 1940. 176 с.
Shubnikov A. V. Symmetry. Moscow, Leningrad: USSR AS, 1940, 176 p. (in Russian)

Шубников А. В. О работах Пьера Кюри в области симметрии // Успехи физ. наук. 1956. Т. 59, вып. 4. С. 591–602.
Shubnikov A. V. On Pierre Curie's work in the field of symmetry. Successes of Physics, 1956, T. 59, V. 4, pp. 591–602. (in Russian).

Шубников А. В. Проблема диссимметрии материальных объектов. М.: Изд. АН СССР, 1961. 56 с.
Shubnikov A. V. The problem of dissymmetry of material objects. Moscow, USSR AS, 1961, 56 p. (in Russian).

Шубников А. В. У истоков кристаллографии. М.: Наука, 1972. 52 с.
Shubnikov A. V. At the origins of crystallography. Moscow: Nauka, 1972, 52 p. (in Russian)

Castellani E., Ismael J. Which Curie's principle? Philosophy of Science, Preprint, 2016, 14 p.

Chalmers A. F. Curie's principle. The British J. for the Philosophy of Science, 1970, 21, P. 133–148.

Curie P. Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique. J. Phys. Theor. Appl., 1894, 3 (1), P. 393–415. doi.org/10.1051/jphystap:018940030039300.

Curie P. Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique. Oeuvres de P. Curie. Paris, 1908, P. 118–141.

Ismael J. Curie's principle. Synthese, 1997, 110, P. 167–190.

Поступила в редакцию / Received 05.09.2024