

Из опыта преподавания. XIX. К 85-летию учебника «Кристаллография» (Попов, Шафрановский, 1941)

Ю. Л. Войтеховский

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
Российское минералогическое общество, Санкт-Петербург, Россия

vojtehovskij@herzen.spb.ru

Статья завершает рассмотрение таблицы 27 видов симметрии (точечных групп, без кубической сингонии). Приведена иерархия 14 линий (семейств), согласованная с иерархией 27 видов симметрии. Статья предназначена преподавателям, аспирантам и студентам естественно-научных специальностей, изучающим основы кристаллографии в геометрическом варианте, без теории групп и линейной алгебры и приурочена к 85-летию выхода в свет учебника «Кристаллография» Г. М. Попова и И. И. Шафрановского.

Ключевые слова: виды (точечные группы), классы и линии (семейства) симметрии; иерархии видов, классов и линий; предельные группы симметрии

From teaching experience. XIX. The 85th anniversary of the textbook “Crystallography” (Popov, Shafranovsky, 1941)

Yu. L. Voytekhovsky

A. I. Herzen Russian State Pedagogical University
Russian Mineralogical Society, Saint Petersburg, Russia

The article completes the consideration of the table of 27 species of symmetry (point groups, without cubic syngony). A hierarchy of 14 lines (families) of symmetry consistent with the hierarchy of 27 species of symmetry is given. The article is intended for teachers, postgraduate students, and students of natural sciences who are studying the basics of crystallography in a geometric context, without group theory or linear algebra. It is dedicated to the 85th anniversary of the publication of the textbook «Crystallography» by G. M. Popov and I. I. Shafranovsky.

Keywords: species (point groups), classes and lines (families) of symmetry, hierarchies of species, classes and lines; limiting symmetry groups

Введение

На статью (Войтеховский, 2025б) автору поступили вопросы от читателей журнала: 1. Зачем, перечисляя виды симметрии (в. с.), перебирать все сочетания элементов симметрии $\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_6, L_{i4}, C, P\}$, ведь изложенный в учебнике (Попов, Шафрановский, 1964, с. 84–88) алгоритм быстро ведет к цели? 2. Почему не принято во внимание авторитетное указание: «Прибегать к сложным представлениям об инверсионных осях следует только в том случае, если никакого другого более простого толкования нельзя найти» (Болдырев, Доливо-Добровольский, 1934, с. 153)? 3. Чем 14 линий семейств (по: Зоркий, 1986, с. 28–37) лучше привычных 7 классов симметрии? 4. Как иерархия линий согласуется с иерархиями классов и в. с.?

На первый вопрос ответим сразу. В поисках в. с. с единичными направлениями мы исходили из того, что ответ неизвестен, тогда как в учебнике алгоритм ведет прямо к известному финалу. При этом пропадает радость открытия. А это важный момент в препода-

вании. Кроме того, не надо идеализировать учебник. «Перпендикулярно исходному единичному направлению присоединяется плоскость симметрии Π (рис. 66, в). Рассматривать этот случай нет надобности, так как для четных осей, согласно теореме 3, приходим к уже введенным центральным в. с. ($L_2\Pi$ дает L_2PC , $L_4\Pi$ — L_4PC , $L_6\Pi$ — L_6PC). Для нечетных осей получаем комбинации, разобранные ниже ($L_1\Pi = P$, $L_3\Pi = L_{i6}$)» (Попов, Шафрановский, 1964, с. 86).

Ниже читаем: «Единичное направление совмещено с единственной инверсионной осью L_{in} . До сих пор не рассматривались отдельно в. с. с инверсионными осями. Здесь также можно выделить примитивную серию: $L_{i1} = C$, $L_{i2} = P$, $L_{i3} = L_3C$, $L_{i4} \rightarrow L_2$, $L_{i6} = L_3\Pi$. Однако, рассматривая данный ряд, находим лишь два в. с., не введенных ранее: $L_{i4} \rightarrow L_2$, $L_{i6} = L_3\Pi$ » (там же, с. 87). Как же так? В. с. $L_3\Pi$ получен выше и отложен искусственно. Поэтому L_{i6} и возникает наряду с L_{i4} якобы с необходимостью. Но у них в кристаллографии разный статус.

Для цитирования: Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. XIX. К 85-летию учебника «Кристаллография» (Попов, Шафрановский, 1941) // Вестник геонаук. 2026. 5(377). С. 32–35. DOI: 10.19110/geov.2026.5.4

For citation: Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. XIX. The 85th anniversary of the textbook “Crystallography” (Popov, Shafranovsky, 1941). Vestnik of Geosciences, 2026, 5(377), pp. 32–35. DOI: 10.19110/geov.2026.5.4



Инверсии

«Прибегать к сложным представлениям об инверсионных осях следует только в том случае, если никакого другого более простого толкования нельзя найти» (Болдырев, Доливо-Добровольский, 1934, с. 153). Фраза явно ориентирует на максимально простое изложение математической теории студентам с гуманитарным складом ума. Лишь в этом мы видим ее педагогическое оправдание. Но, быть может, у инверсионных осей есть и достоинства? Рассмотрим все инверсии.

Первая — отражение фигуры в плоскости Р. Вроде здесь все просто — мы часто видим свое отражение в зеркале. Но в нем правая рука стала левой и наоборот, даже обручальное кольцо переползло¹. В матричном описании эта инверсия меняет знак одной координаты точки: $(x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = (x \ y \ -z)$ — отражение в плоскости, ортогональной к Z.

Вторая — отражение в прямой линии. Что за странное зеркало-линия? О нем в учебниках обычно не говорят, поскольку это поворот вокруг L_2 . Оно сохраняет правую руку — правой, левую — левой, меняя знаки двух координат точки: $(x \ y \ z) \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-x \ -y \ z)$ — поворот на 180° вокруг оси Z.

Третья — отражение в точке. Ее неудачно интерпретируют как отражение в очень маленьком зеркале. Она меняет правое на левое и наоборот, но еще переворачивает фигуру, меняя знаки трех координат точки: $(x \ y \ z) \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = (-x \ -y \ -z)$. Центр инверсии лучше сравнивать с точечной камерой-обскурой.

Но самое интересное — инверсионные оси, которых классики советуют избегать, заменяя композициями. Незаменима лишь L_{i4} , но и ее достаточно, чтобы говорить об их фундаментальности в кристаллографии. В чем сложность их восприятия? Рассмотрим инверсионно-примитивную серию: $L_{i1} = C$, $L_{i2} = P$, $L_{i3} = L_3C$, $L_{i4} \rightarrow L_2$, $L_{i6} = L_3P$. Для нечетных осей: L_{i1} — поворот вокруг L_1 (на 360° , его как бы и нет) + инверсия в C, т. е. просто C; L_{i3} — поворот вокруг L_3 + инверсия в C, т. е. в точности L_3C .

Для четных осей: L_{i2} — поворот вокруг L_2 + инверсия в точке (центре тяжести — ц. т. — истинного C нет), но в в. с. P нет L_2 ; L_{i4} — поворот вокруг L_4 + инверсия в ц. т., но в в. с. L_{i4} нет L_4 (есть L_2 , но она не содержит в себе L_4); L_{i6} — поворот вокруг L_6 + инверсия в ц. т., но в в. с. L_3P нет L_6 (L_3 содержится в L_6 , а не наоборот). Мало того, что элементы симметрии кристалла (P, L_n , L_{in} , C), в отличие от его телесных элементов (граней, ребер, вершин), не потрогать (их следует увидеть немалым интеллектуальным усилием), так еще для интерпретации четных инверсионных осей надо увидеть простые оси, не входящие в соответствующие в. с. и отсутствующие в фигуре. Эта трудность и объясняет рекомендацию классиков.

Но этот прием скрывает еще более глубокое содержание инверсионных осей. По сути, всякая инверсия должна мыслиться как единая, цельная, слитная, одноактная операция. Легко представить $L_{i1} = C$ и $L_{i2} = P$. Но попробуйте вообразить L_{i3} , L_{i4} и L_{i6} , не отрывая поворот от инверсии в C или ц. т. Картина фантастиче-

ская, головокружительная! Космологи утверждают, что так сворачиваются в спирали и просачиваются в черные дыры умирающие галактики, чтобы заново родиться по ту сторону. С той лишь разницей, что в кристаллографии эта процедура должна мыслиться мгновенно как потенция, возможность, характеризующая симметрию фигуры. Преподавание естественно-научной дисциплины в своих предметах должно являть студентам мироздание. Кристаллография — мировоззренческая наука⁵.

27, 14, 7

По крайней мере с Р. Декарта научное исследование подразумевает синтез и анализ как взаимно дополняющие стратегии научного исследования. Хотя история науки показывает, что анализ дается проще, чем синтез. В обсуждаемой таблице 8 в. с. элементарные: L_1 , L_2 , L_3 , L_4 , L_{i4} , L_6 , C, P. Прочие 19⁴ — первый шаг их синтеза в логически замкнутые системы. Объединение в. с. в 7 классов (от примитивного до инверсионно-планального) или в 14 линий (семейств) — второй шаг, выполненный с меньшей или большей детальностью. Во втором случае проявляется важная роль инверсионных осей. Используемые по максимуму, они порождают 6 линий (табл. 1).

Выясняются и другие интересные моменты. Т. к. в кристаллографии порядок оси — всегда натуральное число, а его четность или нечетность влияют на строение в. с., то полезно ввести обозначения: ∞_n , ∞_q , ∞ — какое угодно большое нечетное, четное, любое натуральное число; $-\infty_n$, $-\infty_{4k-2}$, $-\infty_{4k}$, $-\infty$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) — то же для инверсионных осей. И тогда вращающемуся цилиндру ∞/m (асимптота центральных в. с. по П. Кюри) строго соответствуют только гранные формы ∞_q/m , т. к. центральные в. с. с нечетными осями ($-\infty_n$, линия 9) не содержат плоскость, ортогональную к оси. Аналогично покоящемуся цилиндру ∞/mmm (асимптота планаксиальных в. с. по П. Кюри) строго соответствуют только гранные формы ∞_q/mmm . Эти и другие нюансы рассмотрены в статьях (Войтеховский, 2025a; Voytekhsy, 2025).

Иерархии классов и линий

Иерархия 7 кристаллографических классов (Попов, Шафрановский, 1964, с. 92) проста и следует из алгоритма вывода в. с. (рис. 1). Но и в ней уже проявлена обособленность инверсионных классов. Иерархия 14 линий, к тому же обобщенная на некристаллографические в. с., более разнообразна и богата вложениями, особенно в связи с положением инверсионных линий (рис. 2).

³ «В одном мгновенье видеть вечность, / Огромный мир — в зерне песка, / В единой горсти — бесконечность / И небо — в чашечке цветка» (У. Блейк, перевод С. Маршака). С теплотой вспоминаю педанта кристаллографии д. ф.-м. н. Р. В. Галиулина, считавшего, что галактики расположены в узлах гранецентрированной кубической решетки, а если и не так, то только из-за погрешностей измерения...

⁴ Подчеркнем, что 5 кубических в. с. здесь не рассматриваются.

¹ Это смущает одного нашего знакомого, ибо зеркало превращает его «из православного в католика».

² Здесь и далее для краткости вместо диагональной матрицы 3×3 мы показываем ее диагональ.

Таблица 1. Виды и линии симметрии

Table 1. Species and lines of symmetry

Сингонии / Syngonies	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Триклинная / Triclinic	1								-1					
Моноклинная Monoclinic		(2)	{2/m}	[1m]		(12)				[-2]		{-1m2}		
Ромбическая / Rhombic					(2mm)		222	2/mmm					(-2m2)	
Тригональная / Trigonal	3			3m		32			-3			-3m2		
Тетрагональная Tetragonal		4	4/m		4mm		422	4/mmm			-4			-4m2
	5			5m		52			-5			-5m2		
Гексагональная Hexagonal		6	6/m		6mm		622	6/mmm		-6			-6m2	
	7			7m		72			-7			-7m2		
		8	8/m		8mm		822	8/mmm			-8			-8m2
Предельная группа Limiting group	∞_H	∞_C	∞_C/m	$\infty_H m$	$\infty_C mm$	$\infty_H 2$	$\infty_C 22$	∞_C/mmm	$-\infty_H$	$-\infty_{4k-2}$	$-\infty_{4k}$	$-\infty_H m2$	$-\infty_{4k-2} m2$	$-\infty_{4k} m2$
	∞ вк		вц	∞m пк		$\infty 2$ сц		пц	$-\infty$		$-\infty m2$			

Примечание: В моноклинной и ромбической сингониях в одинаковых скобках даны эквивалентные обозначения тех же в. с. В этих 4 случаях допустимо их двоякое положение с разным пространственным положением элементов симметрии. Геометрические интерпретации предельных групп П. Кюри: в — вращающийся, п — покоящийся, с — скрученный, к — конус, ц — цилиндр. Прочие пояснения в тексте.

Notes. In the monoclinic and rhombic syngonies, equivalent symbols for the same elements are given in the same brackets. In these 4 cases, the elements can be placed in two different positions, with their different spatial orientation. The geometric interpretations of P. Curie limit groups are as follows: в — rotating, п — stationary, с — twisted, к — cone, ц — cylinder. For other explanation see the text.

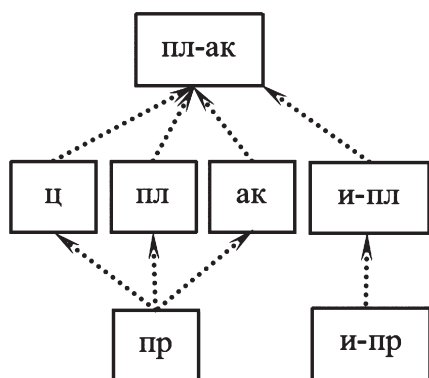


Рис. 1. Иерархия классов симметрии. Обозначения: пр — примитивный, и-пр — инверсионно-примитивный, ц — центральный, пл — планальный, ак — аксиальный, и-пл — инверсионно-планальный, пл-ак — планаксиальный

Fig. 1. Hierarchy of symmetry classes. Symbols: пр — primitive, и-пр — inversion-primitive, ц — central, пл — planar, ак — axial, и-пл — inversion-planar, пл-ак — planaxial

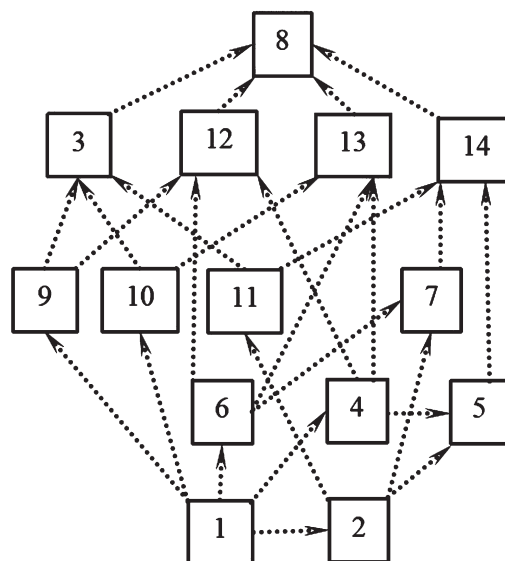


Рис. 2. Иерархия линий (семейств). Номера 1—14 соответствуют столбцам табл. 1

Fig. 2. Hierarchy of lines (families). Numbers 1—14 correspond to the columns of Table 1

Соответствия линий и в. с.

Иерархия кристаллографических в. с. хорошо известна (Вайнштейн, 1979). Вложения линий (рис. 2) далее даны жирным шрифтом, вложения соответствующих в. с. (в обозначениях табл. 1) — после двоеточия: 1→2: 1→(2), 3→6; 1→4: 1→[1m], 3→3m; 1→6: 1→(12), 3→32; 1→9: 1→-1, 3→-3; 1→10: 1→[-2], 3→-6; 2→5: (2)→(2mm), 4→4mm, 6→6mm; 2→7: (2)→222, 4→422, 6→622; 2→11: (2)→-4; 3→8: {2/m}→2/mmm, 4/m→4/mmm, 6/m→6/mmm; 4→5: [1m]→(2mm), 3m→6mm;

4→12: [1m]→{-1m2}, 3m→-3m2; 4→13: [1m]→(-2m2), 3m→-6m2; 5→14: (2mm)→-4m2; 6→7: (12)→222; 32→622; 6→12: (12)→{-1m2}, 32→-3m2; 6→13: (12)→(-2m2); 32→-6m2; 7→14: 222→-4m2; 9→3: -1→{2/m}, -3→6/m; 9→12: -1→{-1m2}, -3→-3m2; 10→3: [-2]→{2/m}, -6→6/m; 10→13: [-2]→(-2m2), -6→-6m2; 11→3: -4→4/m; 11→14: -4→-4m2; 12→8: {-1m2}→2/mmm, -3m2→6/mmm; 13→8: (-2m2)→2/mmm, -6m2→6/mmm; 14→8: -4m2→4/mmm. Вложения в. с. внутри одной ли-



нии: 1: $1 \rightarrow 3$; 2: $(2) \rightarrow 4, (2) \rightarrow 6$; 3: $\{2/m\} \rightarrow 4/m, \{2/m\} \rightarrow 6/m$; 4: $[1m] \rightarrow 3m$; 5: $(2mm) \rightarrow 4mm, (2mm) \rightarrow 6mm$; 6: $(12) \rightarrow 32$; 7: $222 \rightarrow 422, 222 \rightarrow 622$; 8: $2/mmm \rightarrow 4/mmm, 2/mmm \rightarrow 6/mmm$; 9: $-1 \rightarrow -3$; 10: $[-2] \rightarrow -6$; 12: $\{-1m2\} \rightarrow -3m2$; 13: $(-2m2) \rightarrow -6m2$.

Заключение

Рекомендация избегать инверсионных осей, если это возможно, имеет сугубо прагматическое значение. Их замена на композицию простых осей, плоскостей, истинного и ложного центров инверсии (С и ц. т.) в роде упрощает понимание, но взамен требует видеть в фигурах оси, которых нет в их в. с.: L_2 в $P = L_{i2}$, L_4 в L_{i4} , L_6 в L_{i6} . Инверсионные оси симметрии воспринять непросто, особенно в их мгновенной реализации. Зато их максимальное использование позволяет выделить 6 инверсионных линий (всего 14), с более богатой иерархией (структурой вложений), чем у 7 классов. Правильное преподавание предмета состоит в том, чтобы показать весь диапазон возникающих вопросов и, упрощая изложение, не потерять фундаментальный (космический, вселенский) аспект кристаллографии.

Автор благодарит рецензентов за внимательное прочтение статьи и весьма полезные замечания.

Литература / References

Болдырев А. К., Доливо-Добровольский В. В. Классификация, номенклатура и символика 32 видов симметрии кристаллографии // Зап. ЛГИ. 1934. Т. VIII. С. 145—159.
Boldyrev A. K., Dolivo-Dobrovolsky V. V. Classification, nomenclature and symbolism of 32 symmetry species of crystallography. Proc. Leningrad Mining Inst. 1934;8:145—159. Russian.

Вайнштейн Б. К. Современная кристаллография. Т. 1. Симметрия кристаллов. Методы структурной кристаллографии. М.: Наука, 1979. 384 с.

Weinstein B. K. Modern crystallography. Vol. 1. Symmetry of crystals. Methods of structural crystallography. Moscow: Nauka; 1979. 384 p. Russian.

Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. XVII. Бордюры и предельные группы Кюри // Вестник геонаук. 2025а. № 4(364). С. 51—56. DOI:10.19110/geov.2025.4.5.

Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. XVII. Borders and Curie's limit groups. Vestnik of Geosciences. 2025a;4(364):51—56. Russian.

Войтеховский Ю. Л. Из опыта преподавания. XVIII. Таблица 27 видов симметрии // Вестник геонаук. 2025б. № 9(369). С. 36—43. DOI:10.19110/geov.2025.9.5.

Voytekhovsky Yu. L. From teaching experience. XVIII. Table of 27 symmetry species. Vestnik of Geosciences, 2025b;9(369):36—43. Russian.

Зоркий П. М. Симметрия молекул и кристаллических структур. М.: МГУ, 1986. 232 с.

Zorkiy P. M. Symmetry of molecules and crystal structures. Moscow: Moscow State University; 1986. 232 p. Russian.

Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М., Л.: Госгеолиздат, 1941. 242 с.

Popov G. M., Shafranovsky I. I. Crystallography. Moscow, Leningrad: Gosgeolizdat; 1941. 242 p. Russian.

Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография. М.: Высшая школа, 1964. 370 с.

Popov G. M., Shafranovsky I. I. Crystallography. Moscow: Vyshaya shkola; 1964. 370 p. Russian.

Войтеховский Ю. Л. Band and Curie limit symmetry groups. Acta Cryst. Section A. Foundations and Advances. 2025;A81:350—352. <https://doi.org/10.1107/S2053273325003341>.

Поступила в редакцию / Received 29.01.2026